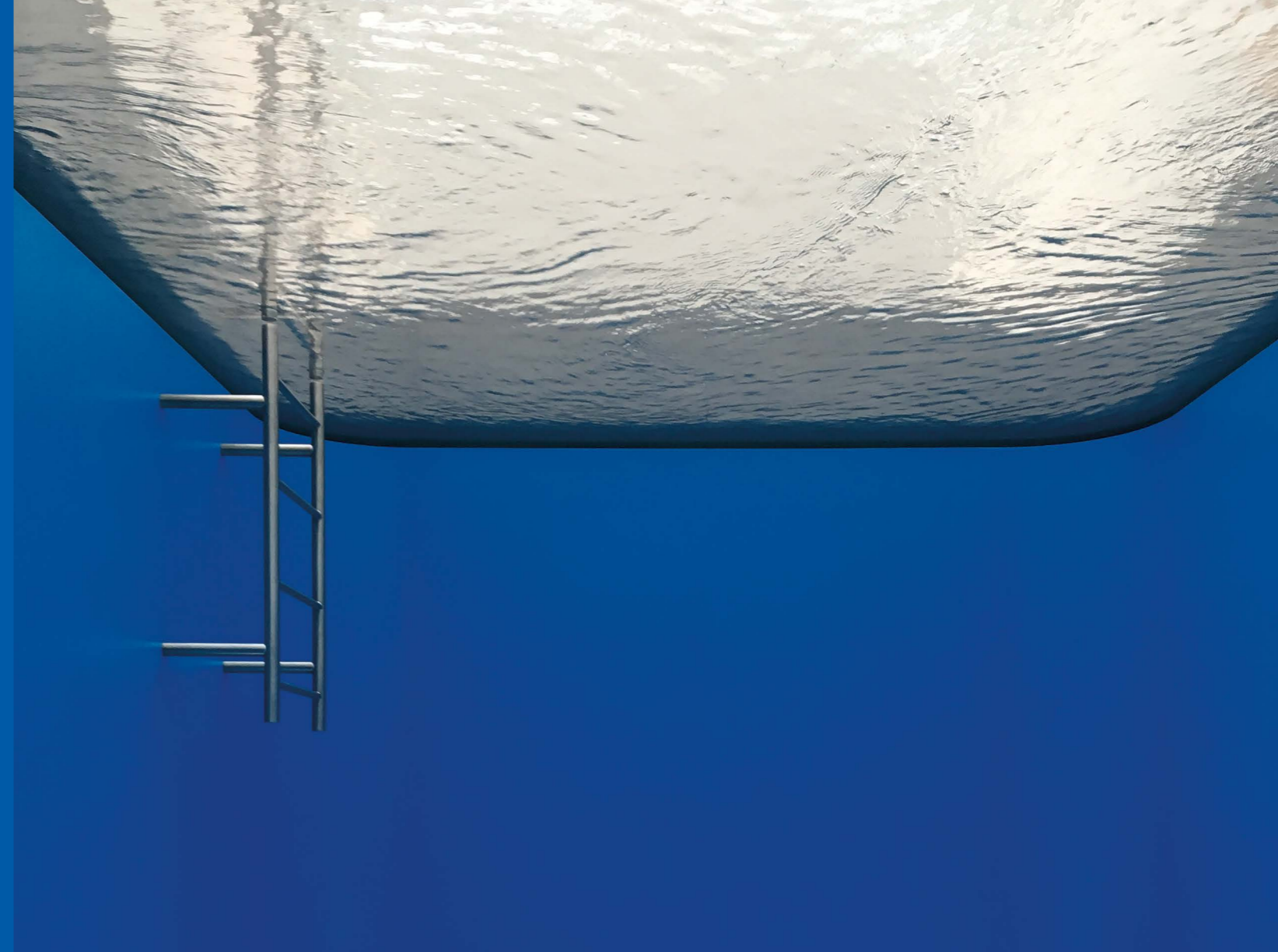


Tegels rond het zwembad

Probleemoplossen in wiskundelessen

De wiskundesectie van het Hogeland College Warffum deed mee aan een Lesson Study (LS)-project gericht op het ontwikkelen van lessen volgens de Teaching Through Problemsolving (TTP)-didactiek. Het doel van het project was om de didactiek van probleem oplossen in wiskundelessen te versterken en als gevolg daarvan de probleemoplossingsvaardigheden van leerlingen. Met veel enthousiasme werd, grotendeels online, samengewerkt aan het ontwerpen van een onderzoeksles waarin leerlingen meer probleemoplossend te werk moesten gaan. Er zijn veel ideeën opgedaan hoe je meer aandacht aan probleemoplossen kunt besteden in wiskundelessen, en er is geoefend met de TTP-didactiek. De observaties van leerlingen geven inzicht in hoe leerlingen reageren op deze werkwijze. In dit artikel beschrijven we eerst kort wat een TTP-les inhoudt. Vervolgens beschrijven een deelnemende docent en een begeleider hun ervaringen. Ten slotte kijken we terug op wat dit TTP-LS-traject de sectieleden en de leerlingen heeft opgeleverd.



Opzet van een TTP-les

De opzet van een TTP-les is in Figuur 1 schematisch weergegeven op basis van de beschrijving van Takahashi (2021). De les start met een introductie waarin de leerlingen worden voorbereid op de les, en mogelijk een verbinding wordt gelegd met de vorige les. Vervolgens doorloopt de les de volgende fases:

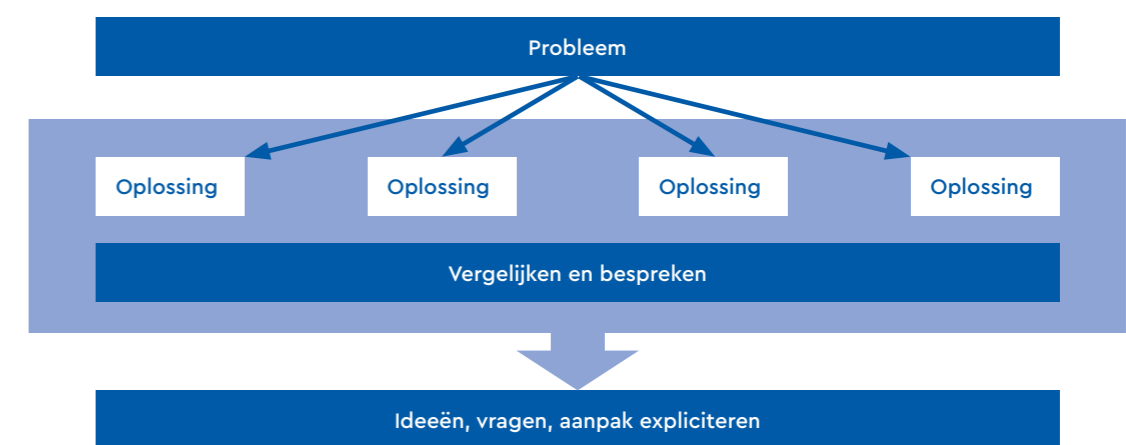
Fase 1: Het probleem stellen (5 – 7 min), waarin de docent het probleem presenteert.

Fase 2: Leerlingen werken aan het probleem (7 – 10 minuten); de docent loopt rond en bekijkt het leerlingenwerk met het oog op de volgende fase.

Fase 3: Vergelijken en bespreken (20 – 25 min), waarin de docent de leerlingen hun ideeën laat uitwisselen en de bespreking richt op de wiskunde die in deze les centraal staat.

Fase 4: Samenvatten (5 – 10 min), waarin de docent de leerlingen helpt om het doel van deze les samen te vatten en deze te noteren.

In een eerder artikel (Roorda, Minderhoud & de Haan, 2021) beschreven we ervaringen met de eerste twee lesfasen: *Het probleem stellen*, en *Leerlingen werken aan het probleem*. In dit artikel geven we meer informatie over de




Figuur 1. De opzet van een TTP-les

derde fase: *Vergelijken en bespreken*. Deze belangrijke en centrale fase van de TTP-les wordt in Japan aangeduid met het woord *Neriage* wat 'kneden en polijsten' betekent (Shimizu, 1999). De fase duurt in Japan zeker 20 minuten en is bedoeld om alle leerlingen mee te nemen in de oplossingsmethoden die door andere leerlingen zijn bedacht. De keuze voor de oplossingen die uitgebreider besproken worden ligt bij de docent. Die heeft namelijk (soms in een LS-team) vooraf bedacht welke oplossingen vooral aandacht moeten krijgen vanuit het perspectief van het curriculum, of vanwege het belang van de aanpak. Elke poging van leerlingen om het probleem op te lossen, ook al is die niet correct of incompleet, wordt gewaardeerd en kan aanleiding vormen voor gesprek door de hele klas. Belangrijk daarbij is om leerlingen op elkaar te laten reageren. Een voorwaarde voor deze lesfase is dat er veiligheid moet zijn om fouten te maken. Wat daarbij kan helpen is dat de docent benadrukt dat iedereen in situaties komt waarin je eerst een aanpak kiest die je niet verder helpt. Het is belangrijker dat je leert om toch door te zetten, dan dat je in één keer het goede antwoord weet. Takahashi (2021) vergelijkt de rol van de docent met die van een dirigent: hij begeleidt de leerlingen in de klas om elkaar te helpen om

samen tot een *gemeenschappelijk begrip* te komen. Het complexe van deze fase is dat er enerzijds doelgerichtheid dient te zijn: de leerlingen moeten meegenomen worden in de oplossingswijzen die bijdragen aan het lesdoel, en anderzijds flexibiliteit, want je weet van tevoren niet precies wat leerlingen bedenken en hoe ze reageren. De fase kan volgens Takahashi verschillende vormen hebben. In de door ons ontwikkelde les was een belangrijk doel van deze fase om verschillende aanpakken voor een probleem te bespreken beginnend bij de meest basale methoden, opklimmend naar de meer geavanceerde methoden om de leerlingen de meer geavanceerde methoden te laten begrijpen.

De ontwikkelde onderzoeksles

De centrale opdracht, het probleem, in de ontwikkelde les staat in Figuur 2. De vier fases van de les werden voorbereid in drie bijeenkomsten. De doelen die uiteindelijk werden geformuleerd hadden zowel een vakinhoudelijke als een probleemoploscomponent. Om informatie te verzamelen over het al dan niet behalen van de leerdoelen door de leerlingen, werden leerlingen geobserveerd, exit-tickets ingenomen en een digitale vragenlijst afgenomen.

<p>Tellen van de tegels 1,2,..., 16</p>	<p>Oppervlakte alles – oppervlakte binnenste vierkant</p> <p>Door de oppervlakte van het binnenste vierkant (zwembad) van het buitenste vierkant af te trekken kom je ook op het aantal tegels.</p>	<p>Vier stukken van z min de hoeken</p> <p>Door vier stukken van de lengte van de zijde van het zwembad te doen en vervolgens de vier hoeken er bij te tellen.</p>																		
<p>Tellen in groepjes (bijvoorbeeld 5 + 5 + 3 + 3)</p> 		<p>Tabel maken, daar regelmaat uit ontdekken</p> <table border="1"> <tr> <td>zwembad</td> <td>1x1</td> <td>2x2</td> <td>3x3</td> <td>4x4</td> <td>5x5</td> </tr> <tr> <td>blauw</td> <td>1</td> <td>4</td> <td>9</td> <td>16</td> <td>25</td> </tr> <tr> <td>wit</td> <td>8</td> <td>12</td> <td>16</td> <td>20</td> <td>24</td> </tr> </table> <p>Leerlingen zouden hier kunnen ontdekken dat er steeds vier witte tegels bijkomen als de zijdes van het zwembad één meer worden. Door dit dan door te tellen, kun je op de antwoorden komen van 4x4 en 5x5.</p>	zwembad	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	blauw	1	4	9	16	25	wit	8	12	16	20	24
zwembad	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5															
blauw	1	4	9	16	25															
wit	8	12	16	20	24															
		<p>Vier stukken van z+2 min de hoekjes</p>																		

Figuur 3. Vooraf bedachte mogelijke oplossingen

Tegels rond het zwembad

Een vierkant zwembad is omringd met een pad van vierkante tegels die allemaal een afmeting hebben van 1m x 1m. Je ziet hier een zwembad van 3 bij 3 meter:



a) Hoeveel tegels zijn er nodig? Kun je dit aantal op meerdere manieren uitrekenen?

Zoek uit hoeveel tegels er nodig zijn voor een pad rond eenzelfde zwembad met de volgende afmetingen:

b) 4m x 4m
c) 5m x 5m

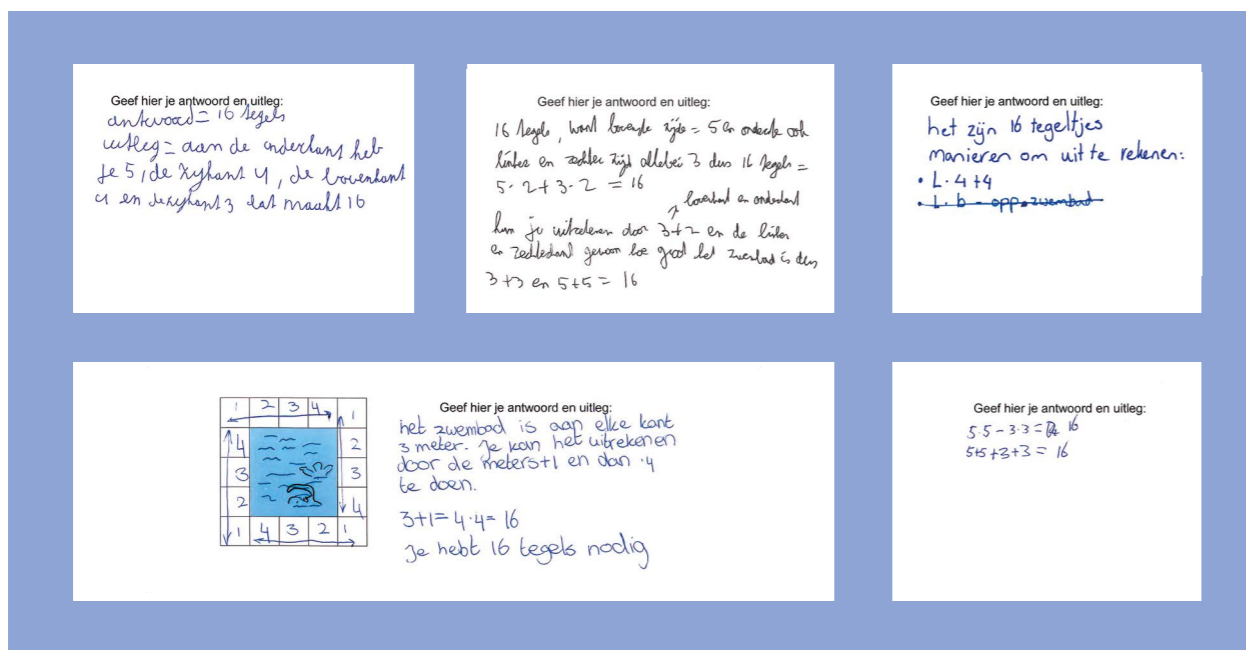
Welke regel kun je bedenken waarmee je ook het aantal tegels rondom een groot zwembad kunt berekenen?

Figuur 2. De startopdracht van de TTP-les

Ervaringen van Rémon als deelnemende docent

Rémon schrijft: *In drie voorbereidingsbijeenkomsten werd over elk van de TTP-fases gesproken. Het kiezen van een opdracht leidde direct tot mooie discussies. Is deze opdracht geschikt om meerdere oplossingen te verzinnen? Wat willen we precies met de les bereiken? Hoe helpt deze les bij het versterken van probleemoplossingsvaardigheden? We bedachten met de sectie verschillende oplossingen (zie Figuur 3). De eerste les is door een collega gegeven in een eerste klas vwo/vwo+. Allerlei oplossingen werden door leerlingen bedacht. In Figuur 4 zijn enkele aanpakken weergegeven. We merkten dat leerlingen creatief waren in hun ideeën. De meeste leerlingen konden aan het eind van de les de gevonden rekenregel ook voor een ander zwembad gebruiken. De stap naar het maken van een formule vonden leerlingen lastiger. We pasten enkele zaken*

aan. Zo werd in de tweede les sterker benadrukt dat een leerling meerdere oplossingen moest verzinnen en werd bij het klassengesprek leerlingen meer zelf aan het woord gelaten. De tweede onderzoeksles mocht ik zelf geven in mijn tweede klas havo/vwo. Ik merkte dat leerlingen moesten wennen aan het feit dat ze eerst zelf aan de slag moesten. Het was interessant om te zien hoe leerlingen dachten, en hoe dit soms verschilde met onze eigen bedachte oplossingen. Zo waren er in mijn klas onverwacht veel leerlingen die met de 'oppervlakte-oplossing' kwamen (zie Figuur 3). Ik merkte dat het tijdens het bespreken soms lastig was ervoor te kiezen om dieper in te gaan op een opmerking van een leerling of bij sommige opmerkingen wat minder lang stil te staan. De tijd van één les (bij ons op school drie kwartier) bleek krap om alle fases van een TTP-les goed te doorlopen. Mogelijk moeten we bepaalde fases nog strakker organiseren om het passend te maken.



Figuur 4. De startopdracht van de TTP-les

Met een evaluatieformulier kregen we allerlei reacties van leerlingen, zoals: 'Je mocht eerst zelf wat bedenken zonder uitleg en daarna kwamen er meer manieren terwijl je normaal gelijk antwoord krijgt', 'Je moest zelf dingen verzinnen en normaal staat dat al bij de opgave in het boek. Ik vond het niet veel leuker dan een normale les', 'Je bent echt bezig met één som. Dat was fijn je kan de hele les besteden om een som goed te bespreken. Maar je leerde eigenlijk maar één ding.', 'Je moest zelf eerst een logische berekening maken, dat vond ik fijner.', 'Het was leuker want je kon zelf iets bedenken in plaats van dat je je aan een regel moet houden'.

Ervaringen van Marjon als begeleider

Het traject werd begeleid door Marjon en Gerrit. Zij zorgden ervoor dat het team in de opeenvolgende bijeenkomsten de stappen van het LS-proces doorliepen en dat het team met elkaar het gesprek voerde over de doelen van de les en de uitvoering van de TTP-didactiek.

Marjon schrijft: *Het enthousiasme van de sectie om samen na te denken over goed*

onderwijs, heb ik ervaren als een van de meest belangrijke onderdelen van deze cyclus. De sectie was bezig met te bedenken hoe leerlingen zouden denken, meer dan met, hoe leg je iets uit. Het is mooi om te zien dat de sectie bij het maken van de les steeds meer nadent over denkprocessen bij leerlingen en ze de leerlingen ook het vertrouwen geven dat ze zelf tot een oplossing kunnen komen. Het blijkt dat er bij de docenten veel inzicht is in mogelijke oplossingen; lastig blijft nog hoe je een volgorde aanbrengt in het bespreken van die oplossingen, afhankelijk van het doel van de les. Welke opbouw wil je als docent, wil je dat leerlingen ook een opbouw zien, bijvoorbeeld van concreet naar abstract, moet een leerling die meteen abstract denkt die opbouw ook kunnen zien?

Ik vond het mooi om te zien hoe trots de docenten zijn op hun leerlingen, het enthousiasme over zelfbedachte oplossingen is groot. De volgende stap zou kunnen zijn dat het vertrouwen in de probleemoplossingsvaardigheden van de leerlingen er meer kan zijn en dat het wiskunde-lesdoel meer benadrukt wordt.

Afsluiting

Via een flankerend onderzoek gefinancierd door de NRO onderzoeken we wat docenten het deelnemen aan dit traject oplevert. Daarvoor zijn ze na afloop van de LS-cyclus geïnterviewd. Een patroon dat we in de interviews zien is dat docenten niet echt anders aan gaan kijken tegen probleemoplossingsvaardigheden, maar dat de TTP-didactiek of elementen daarvan wel handvatten geeft om meer aandacht te hebben voor probleemoplossen. Rémon zegt hierover bijvoorbeeld: *Ik ervaarde in mijn lessen dat ik eigenlijk te weinig aandacht heb voor probleemoplossingsvaardigheden. Dit traject heeft me ten eerste de hele aanpak van een TTP-les opgeleverd. Door deze manier van werken worden leerlingen meer uitgedaagd ook deze vaardigheden te ontwikkelen en daadwerkelijk een probleem op te durven lossen. Ik probeer zo nu en dan een les op deze manier vorm te geven, om de focus te houden op de probleemoplossingsvaardigheden.*

Een 'aanjager' van het leerproces van docenten blijkt met name het observeren tijdens de onderzoeksles. Hierin werd zichtbaar dat leerlingen soms mooie en creatieve ideeën hebben, maar ook dat een deel van de leerlingen weinig wiskundige vaardigheden, die volgens de docent wel behandeld zijn, kunnen koppelen aan de opdracht.

Op basis van de analyses van de gegeven lessen blijkt dat het uitvoeren van het klassengesprek in de fase *Vergelijken en bespreken* nog verder ontwikkeld en geoefend moet worden. Het volgens een vooropgezet plan bespreken van ideeën van leerlingen, waarbij de inbreng van leerlingen volop wordt gebruikt als input bleek lastiger dan vooraf gedacht. Daarvoor zou het team nauwkeuriger moeten bespreken welke ideeën en oplossingen van leerlingen door alle leerlingen begrepen en verwoord moeten worden, en welke wiskundige kennis leerlingen bij dit specifieke probleem moeten kunnen verwoorden. Ook een kernachtige samenvatting van de les, gericht op vakinhoud en op probleemoplossingsvaardigheden kan sterker onder woorden gebracht worden. Genoeg elementen voor een volgende LS-cyclus.

Een veel gehoorde positieve reactie op het project is de waarde van de samenwerking. Rémon zegt: *Ik denk dat het doorlopen van een LS bij ons allemaal ervoor zorgt dat we van elkaar leren. Dit vind ik heel belangrijk: door met een vaksectie met elkaar aan een lesontwerp te werken, hoor je verschillende gedachten en maak je elkaar beter.*

Meer informatie over dit TTP-LS project, ondersteunende materialen en voorbeeldlessen komen in najaar 2022 beschikbaar voor wiskundesecties op www.ttpwiskunde.nl. Ook kunnen docenten of secties zich aanmelden voor begeleidingstrajecten via Expertisecentrum Vakdidactiek Noord (zie <https://www.rug.nl/gmw/lerarenopleiding/professionalisering/>). Dit onderzoek is gefinancierd door Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek (NRO) met projectnummer 40.5.20500.172

Literatuur

- Roorda, G., Minderhoud, M., & de Haan, D. (2021). Aanstekelijke wiskundelessen met lucifers. In S. de Vries & M. Mazereeuw: *Didactiek voor vak en beroep*. NHL Stenden Hogeschool.
- Shimizu, Y. (1999). Aspects of mathematical teacher education in Japan: Focusing on the teachers' roles. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2, 107-116.
- Takahashi, A. (2021). *Teaching Mathematics Through Problem-solving, a pedagogical approach*. Routledge.

Gerrit Roorda is vakdidacticus wiskunde en lerarenopleider aan zowel de Rijksuniversiteit Groningen als aan de Master Leraar Wiskunde van NHL Stenden Hogeschool. Contact-emailadres; g.roorda@rug.nl

Rémon Kooi is docent wiskunde op het Hogeland College Warffum.

Marjon Minderhoud is lerarenopleider aan de bacheloropleiding Leraar Wiskunde van NHL Stenden Hogeschool.