



Teaching  
through  
problem solving

Lesson Study

# TTP-LS

## Over het leren van leerlingen en leraren

Gerrit Roorda

We beginnen om



Maar..... hoe  
groot is de hoek  
tussen kleine en  
grote wijzer?



rijksuniversiteit  
groningen



21-3-2023 | 2

# Project: deelnemers



Dit onderzoek is (deels) gefinancierd door Nationaal Regieorgaan  
Onderwijsonderzoek (NRO) met projectnummer 40.5.20500.172



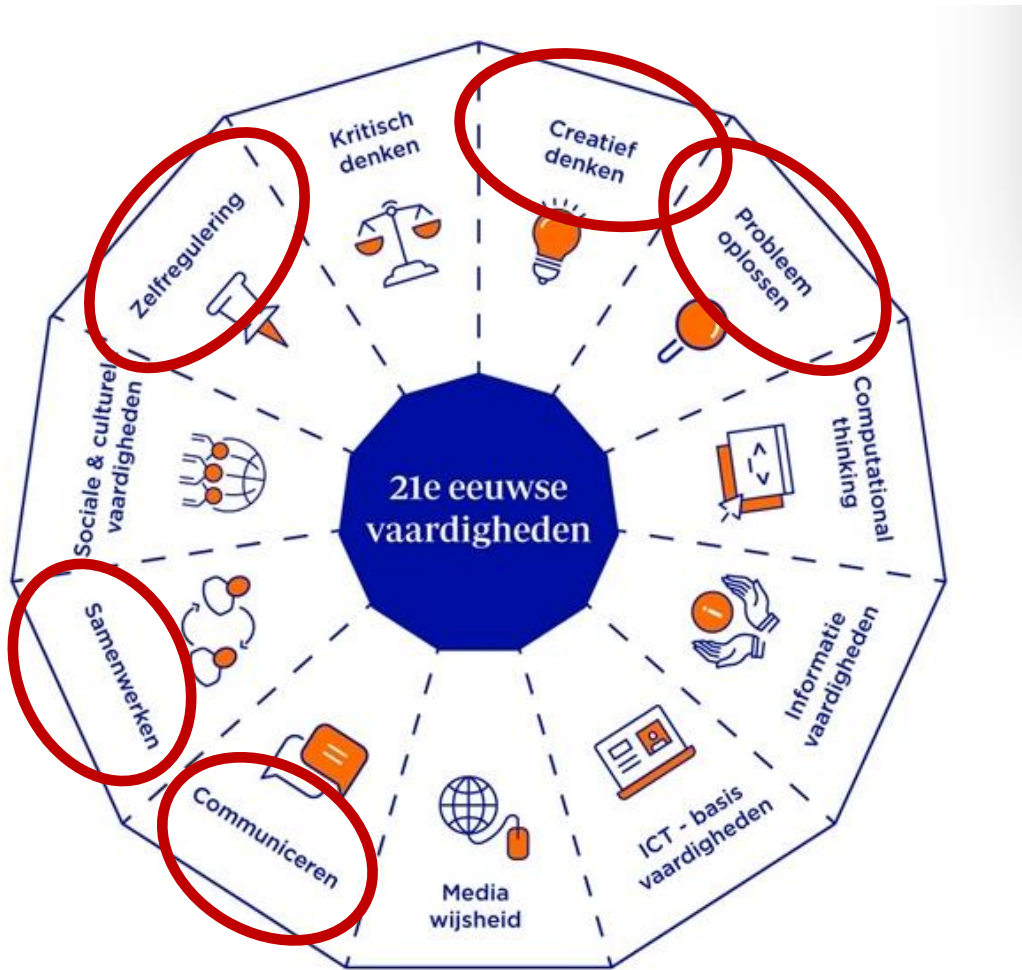
# Probleemoplossen



- 21<sup>e</sup> eeuwse vaardigheden
- Handig: Er zijn veel problemen.
- Stevo Akkerman: Stem PtP (Trouw, 15-03-2023)



# Probleemoplossen



- In het TTP-project komen deze aan de orde.
- Op het niveau van 'wiskunde-problemen'



# Informatie: Probleemoplossen

Probleemoplossingsvaardigheden combinatie van:

- *wiskundige heuristieken,*
- *metacognitieve vaardigheden*
- *aannemen van een productieve houding.*

Deze POV gebruikt de leerling om na te gaan op welke manier *vakinhoudelijke kennis en vaardigheden* ingezet kunnen worden voor het oplossen van het probleem.



# De opzet

1. Waarom TTP-LS?
2. Meer info over TTP
3. Het project TTP-LS.
4. Aan de slag op je school!?



## TTP-LS

**TTP: Teaching through problemsolving:** Een didactiek om wiskunde te geven vanuit probleemoplossingsactiviteiten van leerlingen

**Lesson Study:** Een manier om te professionaliseren door als een team lessen te ontwikkelen en onderzoeken.



# 1. Waarom TTP-LS?

- LS-project van Siebrich de Vries
- Ervaringen in Japan
- Wiskundeonderwijs in Nederland





# Lesson Study project 2014 - 2017





# Nascholing docenten

## Kenmerken effectieve professionalisering:

- Focus op dagelijks werk, vakinhoud en vakdidactiek
- Gericht op begrijpen van leerproces van de leerling
- Samen met anderen
- Langere periode
- Onderzoek naar eigen praktijk.

LS is een vorm die deze kenmerken heeft.



# Japan

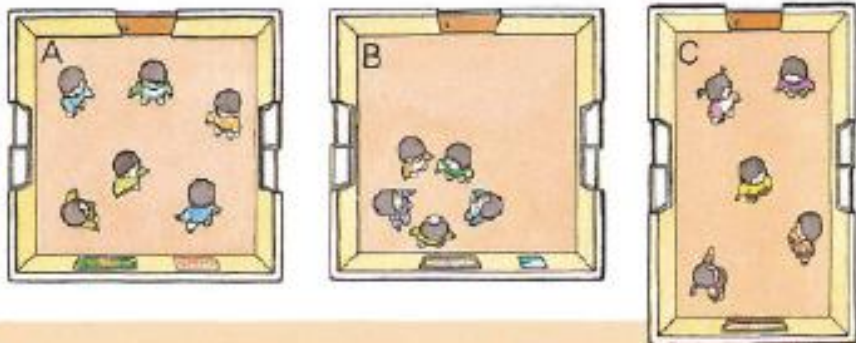
## Lesson Study Immersion program: Tokyo Gakugei University Project IMPULS





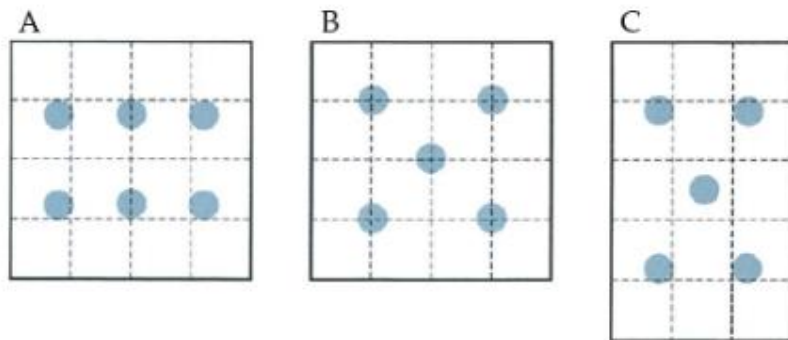
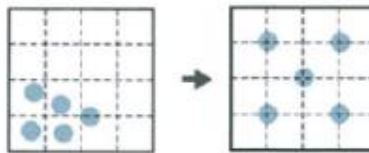
► **Crowdedness**

**1** Kiyoshi and his friends will sleep in cabins A, B and C at camp.  
Which cabin is the most crowded?



**?** Let's think about how we can figure out how crowded something is!

If people are clustered around one place, we should spread them out evenly, shouldn't we?



**Area of Cabin and the Number of People**

	Area ( $m^2$ )	Number of People
A	16	6
B	16	5
C	15	5

I found the areas of the cabins and organized them into a table.



## From anticipating students' responses

**Area of Cabin and the Number of People**

	Area ( $m^2$ )	Number of People
A	16	6
B	16	5
C	15	5

Cabin A:  $16 \div 6 = 2.666\dots$

Cabin C:  $15 \div 5 = 3$

$m^2 / \text{people}$

Cabin A:  $6 \div 16 = 0.375$

Cabin C:  $5 \div 15 = 0.333\dots$

$\text{people} / m^2$

$6 \times 5 = 30$

Cabin A:  $16 \times 5 = 80$

Cabin C:  $15 \times 6 = 90$

$m^2 / \text{people}$

$16 \times 15 = 240$

Cabin A:  $6 \times 15 = 90$

Cabin C:  $5 \times 16 = 80$

$\text{people} / m^2$

Accuracy, Efficiency, Generalizability

LESSON STUDY ALLIANCE

Helping teachers work together to improve teaching & learning.

<http://www.LSAlliance.org>



# Wiskunde onderwijs in Nederland

- Probleemoplossingsvaardigheden (POV) beperkte aandacht in wiskundelessen. (IvhO, 2019)
- Directe instructie leidt tot betere leerlingresultaten (zie [zie leraar24](#))
- Ook initiatieven om wiskunde meer vanuit de activiteit van lln te onderwijzen (FI, Chris Kooloos, Thinking Classroom)

**T 20** | ▶▶ 25 | Herleid.

a	$2p^2q \cdot 3p^3q^2$	c	$\frac{48x^4y^2}{8x^3y}$	e	$(2p^2)^4 + (-4p^4)^2$
b	$3ab^2 \cdot 4a^2 - 5a^3 \cdot b^2$	d	$(-4a^3)^3$	f	$\frac{(3x^2y)^2}{12xy}$

**21** Herleid.

a	$x^2 \cdot x^3$	c	$4a^2b \cdot 5a^3b^2$	e	$5x^2y \cdot 2x - 3x^3y$
b	$2p^3 \cdot 3p^2$	d	$-2p^4q^3 \cdot -3pq$	f	$12a^4b \cdot \frac{1}{4}ab - 8ab$

**22** Herleid.

a	$(a^3)^4$	c	$(q^3)^4 + (q^6)^2$	e	$10x^6 - 5(x^2)^3$
b	$(p^2)^3 \cdot (p^3)^5$	d	$6a \cdot (a^4)^2$	f	$5(x^8)^2 - 3x^{10}$

**23** Herleid.

a	$(p^2q)^3$	c	$(-5x^2y^3)^2$	e	$(3a)^2 \cdot (2a^2)^3$
b	$(3x^2)^3$	d	$(-4ab^4)^2$	f	$(3a^3)^2 + (2a^2)^3$

**24** Herleid.

a	$\frac{12x^6}{4x^2}$	c	$\frac{24a^4b^2}{6ab}$	e	$\frac{14x^3y^2}{24x^2y}$
b	$\frac{5x^{10}}{15x^5}$	d	$\frac{-15p^6q}{5p^2q}$	f	$\frac{(2ab)^3}{(3ab)^2}$

**A 25** Herleid.

a	$2a^2 \cdot 4a^3$	e	$-(3a^4)^2$
b	$-5a^7 \cdot a^3$	f	$(-2a^2)^5$
c	$\frac{-28a^6}{7a}$	g	$(-a^3)^3$
d	$(-4a)^4$	h	$(5a)^3 \cdot -3a$

**A 26** Herleid.

a	$(ab)^4 \cdot a$	d	$(3a)^3 - 8a^3$
b	$(-2ab)^3 \cdot b$	e	$(\frac{1}{2}a)^2 + (-a)^2$
c	$(3a)^2 + (2b)^2$	f	$(5a^4)^2 + (-a^2)^4$



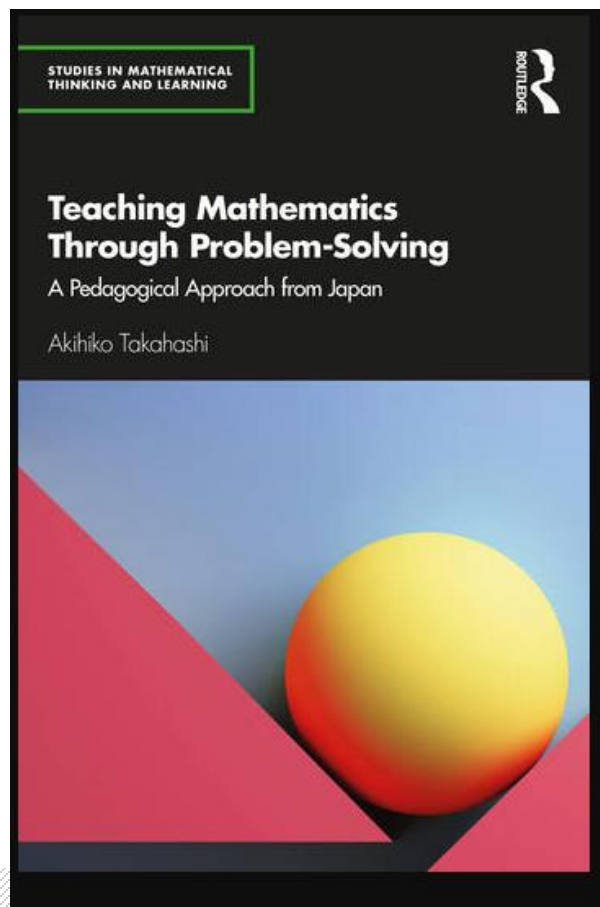


# De opzet

1. Waarom TTP-LS?
2. Meer info over TTP
3. Het project TTP-LS!
4. Aan de slag op je school!?



# Teaching Through Problem-solving



Takahashi, A. (2021) *Teaching Mathematics through problem-solving. A pedagogical approach from Japan*. New York, Routledge.



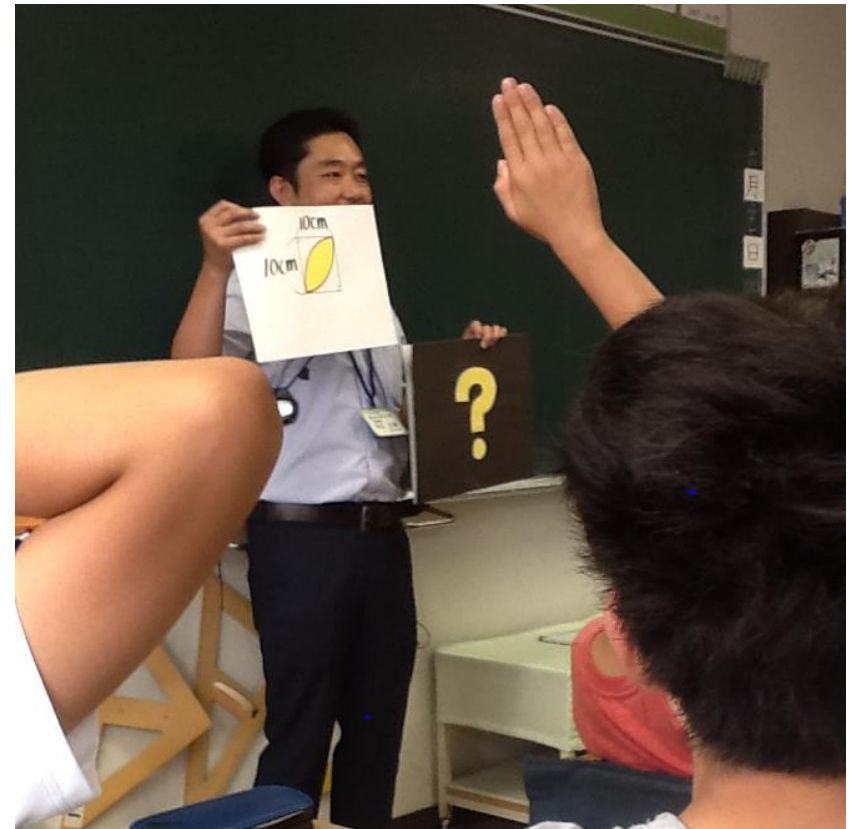
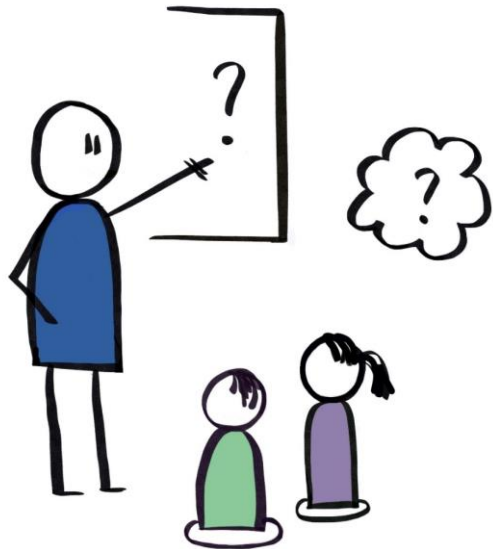


# De TTP-fases





# Fase 1: Presenteer het probleem





## Fase 2

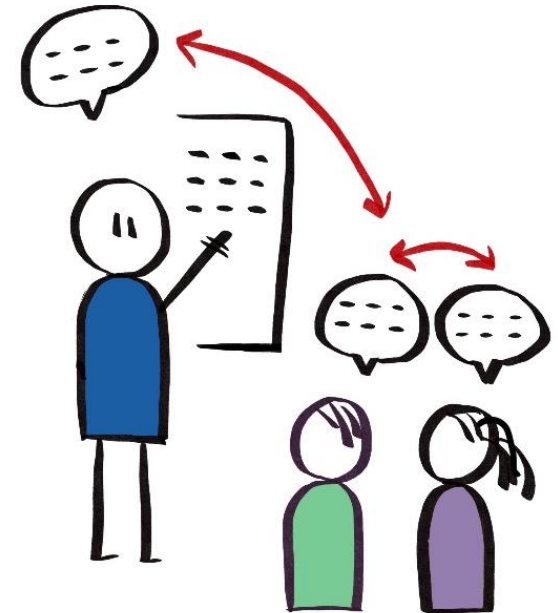




## Fase 3: Het klasgesprek

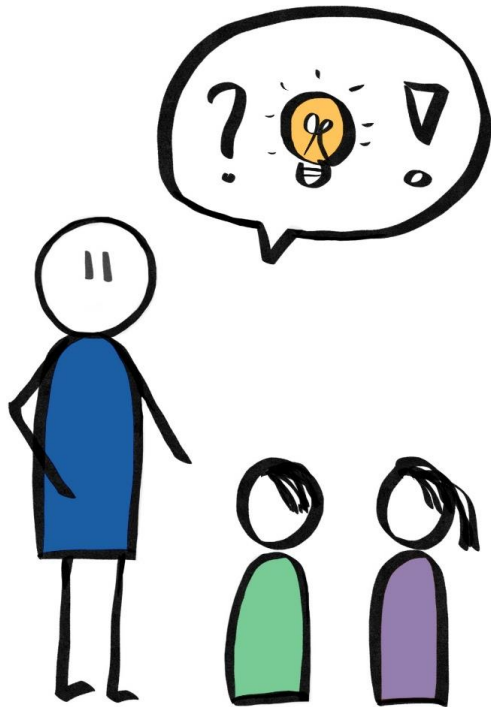
### Principes:

- Niet klaar = nog aan het nadenken.
- Fout = daar kunnen we met elkaar van leren.
- Gemeenschappelijk begrijpen
- De docent leidt het gesprek op basis van
  - o Wat leerlingen hebben bedacht
  - o Wat de docent wil bereiken in de les.





## Fase 4

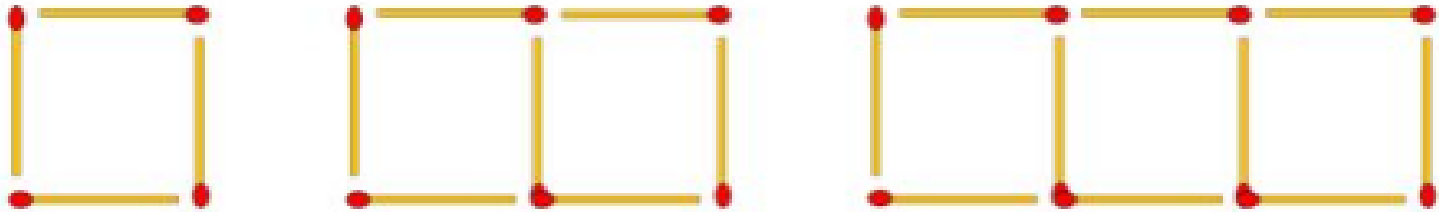


Voorbeelden van reflecties van leerlingen:

- You can make so many different equations with one pattern and I felt it was easier to learn with patterns
- I learned not to fail for the simplest mistakes
- I learned not to erase mistakes, because sometimes you're mistakes are your successes. I also learned that there are more than one ways to find the correct equation



## Het probleem uit de video



Hoeveel lucifers in de twintigste figuur?



# Voorbeeldes Takahashi



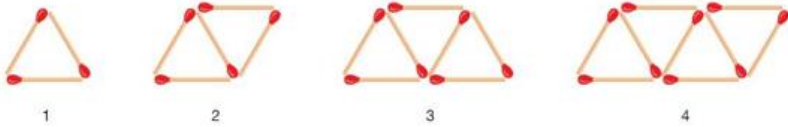
# Gesprek

Bespreek met je buur je gedachten over deze video



## 4.4 Woordformules

**O 33** Met lucifers kun je figuren leggen zoals hieronder.



figuur 4.4 In de rij lucifers zit regelmaat.

- a Teken de twee volgende figuren.  
b Neem de tabel over en vul hem in.

nummer figuur	1	2	3	4	5	6
aantal lucifers	3	5				

- c Hoeveel lucifers heb je nodig voor figuur 8? En voor figuur 10?  
d Voor een figuur heb je 95 lucifers nodig. Hoeveel lucifers heb je nodig voor de volgende figuur?  
e Schrijf op hoe je het aantal lucifers kunt berekenen als je het nummer van de figuur weet.

### Theorie A Woordformules gebruiken

Weet je in opgave 33 het nummer van de figuur, dan kun je berekenen uit hoeveel lucifers die figuur bestaat.

voor de figuur met nummer 3      aantal lucifers =  $2 \cdot 3 + 1$

voor de figuur met nummer 5      aantal lucifers =  $2 \cdot 5 + 1$

Voor een willekeurig nummer krijg je

**aantal lucifers =  $2 \cdot \text{nummer} + 1$ .**

Je hebt hier een voorbeeld van een **woordformule**.

Wil je weten hoeveel lucifers je nodig hebt voor nummer 24, dan vervang je in de woordformule **nummer** door **24**. Je krijgt

aantal lucifers =  $2 \cdot 24 + 1 = 48 + 1 = 49$ .

In een woordformule staat op een korte en handige manier hoe je iets moet berekenen.



Handig zo'n woordformule!  
Je berekent snel het aantal lucifers.

### Voorbeeld

Bij het huren van de cabriolet in de advertentie hoort de woordformule **bedrag =  $40 + 50 \cdot \text{aantal dagen}$** . Het bedrag is in euro's.

- a Hoeveel kost het om de cabriolet 6 dagen te huren?  
b Hoeveel kost het om de cabriolet 2 weken te huren?

*Uitwerking*

a 6 dagen geeft bedrag =  $40 + 50 \cdot 6 = 40 + 300 = 340$  euro.

b 2 weken is 14 dagen, dus bedrag =  $40 + 50 \cdot 14 = 40 + 700 = 740$  euro.



- 34** Astrid gaat behangen. Eerst moet het oude behang van de muur. Ze huurt daarom een behangafstomer. Bij het huren hoort de woordformule

**bedrag in euro's =  $15 \cdot \text{aantal dagen} + 7,50$ .**

- a Astrid huurt de behangafstomer 6 dagen. Hoeveel moet ze betalen?  
b Bij het huren betaal je een bedrag per dag en een bedrag aan administratiekosten. Hoeveel is het bedrag per dag? En hoeveel zijn de administratiekosten?  
c De administratiekosten gaan € 2,50 omhoog. Schrijf de nieuwe woordformule op.

- 35** Ilse doet aan een sponsorloop mee. Sommige sponsors betalen een vast bedrag, anderen betalen een bedrag per rondje.

Het bedrag in euro's dat Ilse ontvangt, is te berekenen met de woordformule

**bedrag =  $8 + 2,50 \cdot \text{aantal rondes}$ .**

- a Hoeveel ontvangt Ilse als ze 12 rondes loopt?  
b Hoeveel ontvangt Ilse als ze 20 rondes loopt?  
c Hoeveel ontvangt Ilse per rondje? Hoeveel is het vaste bedrag?

Carlijn doet ook mee aan de sponsorloop. Zij heeft een vast bedrag van 12 euro en ze ontvangt 2 euro per rondje.  
d Schrijf de woordformule van het bedrag in euro's van Carlijn op.

- e Carlijn en Ilse lopen precies evenveel rondjes. Toevallig hebben ze hetzelfde bedrag bij elkaar gelopen. Zoek eens uit hoeveel rondjes ze gelopen hebben.





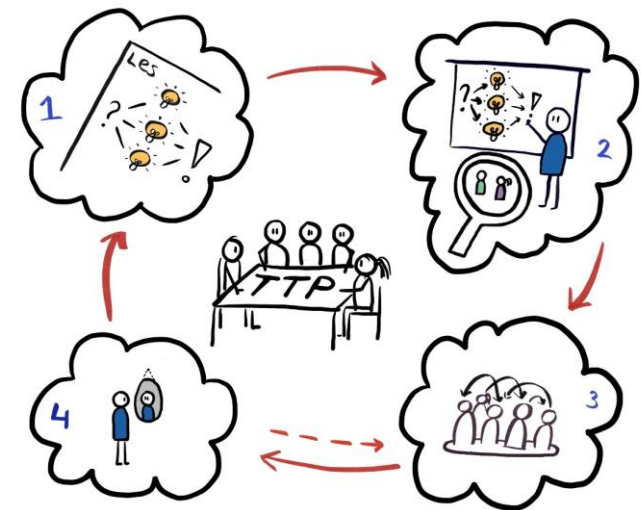
# De opzet

1. Waarom TTP-LS?
2. Meer info over TTP
3. Het project TTP-LS!
4. Aan de slag op je school!?



# Wat hebben we gedaan in het project?

- Twee scholen: Ronde 1: twee groepen; Ronde 2: drie groepen.
- Drie introductiebijeenkomsten TTP en LS
- Lesson Study cyclus:
  - Fase 1 (3 bijeenkomsten),
  - Fase 2,3 (2 bijeenkomsten),
  - Fase 4 (1 bijeenkomst),
  - LS facilitator (extern)
- Teaching Through Problemsolving:
  - Drie voorbeeld- TTP-opdrachten,
  - De vier TTP-fases worden voorbereid.





# Meerder lessen ontwikkeld

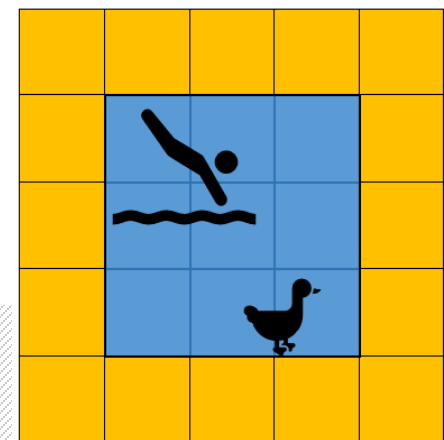
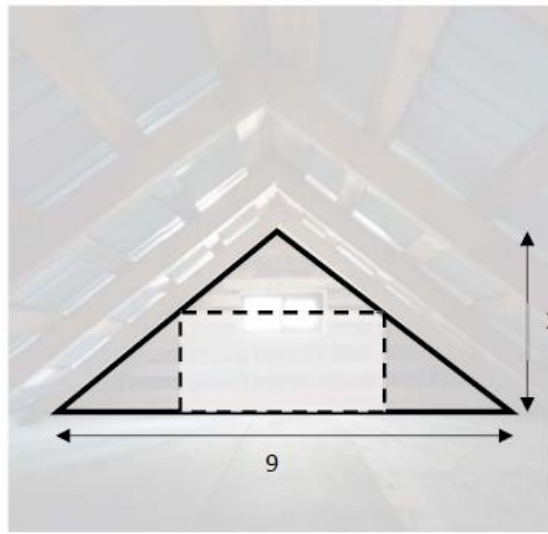
Gegeven is de onderstaande tabel bij een kwadratisch verband:

$x$	.....	1	2	3	4	.....	7
$y$		0	-3	-4	-3		?

12

a. Bereken de  $y$ -waarde bij  $x = 7$ .

$\curvearrowright$   $1\frac{1}{3}$        $\curvearrowright$   $0,75$   
 $(\frac{3}{4})$





## Conjecture map (Sandoval, 2014)

**Vermoeden:** Van wiskundedocenten die onderwijs in POV willen verbeteren, vraagt het om zich het werken met de TTP-didactiek eigen te maken ingebed in de LS-werkwijze

**Ontwerpkenmerken:** TTP, LS en schoolcontext

**Mechanismes:** docenten ervaren:

- dat er een gestructureerde didactiek is om POV te onderwijzen
- dat je binnen het curriculum aandacht kunt hebben voor POV
- dat leerlingen in staat zijn tot eigen oplossingen te komen
- dat hun opvattingen over onderwijs in POV veranderen

**Opbrengsten:** docenten gaan:

- de TTP-opdrachten/TTP-didactiek gebruiken in hun onderwijs,
- in andere lessen minder 'antwoord-gericht' lesgeven
- meer oog krijgen voor POV.



# Onderzoeksvragen

Hoe kan een professionaliseringsinterventie met kenmerken van 'Teaching Through Problem-solving' ingebed in 'Lesson Study' wiskundedocenten ondersteunen om aandacht aan POV te besteden?

Welke successen en knelpunten ervaren docenten en begeleiders bij de implementatie van TTP-LS in de twee scholen met betrekking tot

1. de kenmerken van de TTP-LS-interventie
2. de mechanismes die tot mogelijke opbrengsten leiden?

Wat zijn de ervaren opbrengsten van de TTP-LS-interventie?



## Methode

- Gestructureerde onderzoekslogboeken van LS begeleiders na elke bijeenkomst gebaseerd op de conjecture map;
- Na elke LS-cyclus: semi-gestructureerde interviews met deelnemers (ronde 1, n=9, ronde 2, n=12)
- Documentanalyse (bijv lesplannen en verslagen);
- Coderingen en analyse van interviews op basis van de conjecture map.



# Resultaten: Interventie

## Successen and knelpunten LS/TTP interventie (n=9 , 12)

	Successen	knelpunten
Lesson Study	<ul style="list-style-type: none"><li>• Twee cycli uitgevoerd</li><li>• Samenwerking sectie</li><li>• Bruikbaar om te leren over TTP</li><li>• Observatie waardevol</li><li>• Veel inzichten in leren leerlingen</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Tijdsinvestering</li><li>• Lesformulier uitgebreid</li><li>• Vastleggen leerproces</li></ul>
TTP	<ul style="list-style-type: none"><li>• TTP een mooie didactiek</li><li>• Lln leren na te denken</li><li>• Oplossingen van lln centraal</li><li>• Startopdracht aanreiken</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Past niet goed in 45 min</li><li>• Lastig ivm vol programma</li><li>• Flexibiliteit klassengesprek lastig</li><li>• Fase 3,4 minder goed voorbereid</li><li>• Eigen maken TTP-didactiek</li></ul>
School- context	<ul style="list-style-type: none"><li>• Ingeroosterde tijd</li><li>• Ondersteuning schoolleiding</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Inbedding in school</li></ul>





# Resultaten: Interventie

## Successen and knelpunten LS/TTP interventie (n=9 , 12)

	Successen	knelpunten
Lesson Study	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Twee cycli uitgevoerd</li> <li>• Samenwerking sectie</li> <li>• Bruikbaar om te leren over TTP</li> <li>• Observatie waardevol</li> <li>• Veel inzichten in leren leerlingen</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tijdsinvestering</li> <li>• Lesformulier uitgebreid</li> <li>• Vastleggen leerproces</li> </ul>
TTP	<ul style="list-style-type: none"> <li>• TTP goede didactiek</li> <li>• TTP helpt om te denken</li> <li>• TTP helpt om van lln centraal</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Past niet goed in 45 min</li> <li>• Lastig ivm vol programma</li> <li>• Flexibiliteit klassengesprek lastig</li> </ul>

*Je hoorde ineens hoe ze beginnen na te denken, ergens een begin maken, elkaar ook corrigeren, [...] hoe ze ook ermee omgaan als ze dan, als het niet lukt. [...] En dat vond ik wel een hele waardevol*



# Resultaten: Interventie

## Successen and knelpunten LS/TTP interventie (n=9 , 12)

	Successen	knelpunten
Lesson Study	<ul style="list-style-type: none"><li>• Twee cycli uitgevoerd</li><li>• Samenwerking sectie</li><li>• Bruikbaar om te leren over TTP</li><li>• Observatie waardevol</li><li>• Veel inzichten in leren leerlingen</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Tijdsinvestering</li><li>• Lesformulier uitgebreid</li><li>• Vastleggen leerproces</li></ul>
TTP	<ul style="list-style-type: none"><li>• TTP een mooie didactiek</li><li>• Lln leren na te denken</li><li>• Oplossingen van lln centraal</li><li>• Startopdracht aanreiken</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Past niet goed in 45 min</li><li>• Lastig ivm vol programma</li><li>• Flexibiliteit klassengesprek lastig</li><li>• Fase 3,4 minder goed voorbereid</li><li>• Eigen maken TTP-didactiek</li></ul>
School- context	<ul style="list-style-type: none"><li>• Ingeroosterde tijd</li><li>• Ondersteuning schoolleiding</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Inbedding in school</li></ul>



*Ja [deze fase is] heel belangrijk. Misschien wel de belangrijkste. De verschillende strategieën laten zien en daar gaat het nou eigenlijk juist om. Dat ze zien hoe je zo iets kan aanpakken, ook als ze er niet uit komen. [...] dus niet alleen om de goede oplossingen te geven, maar ook de methodes waarop ze ze hebben gevonden, het hebben aangepakt.  
Heel belangrijk ja*

**interven  
knelpu**

- de lestijd is te krap,
- soms dezelfde lln aan het woord,
- soms niet duidelijk in welke volgorde bespreken
- lastig beslissen welke aantekeningen op het bord komen
- het klassengesprek minder goed uitgevoerd dan gewenst.

- Tijdsi
- Lesfor
- Vastle

- Veel inzichten

TTP

- TTP een mooie didactiek
- lln leren na te denken
- Oplossingen van lln centraal
- Startopdracht aanreiken

- Past niet g 45 min
- Lastig iv of programma
- Flexibiliteit klassengesprek lastig
- Fase 3,4 minder goed voorbereid
- n maken TTP-didactiek

School

- Ingevoerde tijd

dding in school

*Misschien dat we bij het voorbespreken ook nog wat meer hadden moeten stilstaan van oh ja dit waren de doelen, dat mogen we ook best aan die leerlingen vertellen.*



# Resultaten: Interventie

## Successen and knelpunten LS/TTP interventie (n=9 , 12)

	Successen	knelpunten
Lesson Study	<ul style="list-style-type: none"><li>• Twee cycli uitgevoerd</li><li>• Samenwerking sectie</li><li>• Bruikbaar om te leren over TTP</li><li>• Observatie waardevol</li><li>• Veel inzichten in leren leerlingen</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Tijdsinvestering</li><li>• Lesformulier uitgebreid</li><li>• Vastleggen leerproces</li></ul>
TTP	<ul style="list-style-type: none"><li>• TTP een mooie didactiek</li><li>• Lln leren na te denken</li><li>• Oplossingen van lln centraal</li><li>• Startopdracht aanreiken</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Past niet goed in 45 min</li><li>• Lastig ivm vol programma</li><li>• Flexibiliteit klassengesprek lastig</li><li>• Fase 3,4 minder goed voorbereid</li><li>• Eigen maken TTP-didactiek</li></ul>
School- context	<ul style="list-style-type: none"><li>• Ingeroosterde tijd</li><li>• Ondersteuning schoolleiding</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Inbedding in school</li></ul>



# Resultaten Mechanismes

	<b>Successen</b>	<b>Knelpunten</b>
Leerlingen	<ul style="list-style-type: none"><li>• Veel leerlingen vinden TTP-les leuk</li><li>• Leerlingen zijn in staat tot eigen oplossingen</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Sommige leerlingen vinden het lastig een probleem aan te pakken</li><li>• Leerlingen denken dat ze het goed moeten doen (Verschillen tussen 'teams')</li></ul>
Didactiek	<ul style="list-style-type: none"><li>• TTP geschikt voor POV (koppelen aan kennis, houding).</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Meer nadruk op POV</li><li>• Vaker gebruiken</li><li>• Welke POV?</li></ul>
Curriculum	<ul style="list-style-type: none"><li>• TTP bruikbaar voor 'curriculum'</li><li>• Kan bij veel (maar niet alle) onderwerpen</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Tijd nodig voor TTP-lessen (en het kan efficiënter)</li></ul>
Opvattingen	Geen duidelijke verandering geconstateerd. Moeilijk meetbaar	



# Resultaten Mechanismes

	Successen	Knelpunten
Leerlingen	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Veel leerlingen vinden TTP-les leuk</li> <li>• Leerlingen zijn in staat tot eigen oplossingen</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sommige leerlingen vinden het lastig een probleem aan te pakken</li> <li>• Leerlingen denken dat ze het goed moeten doen (Verschillen tussen 'teams')</li> </ul>
Didactiek	<ul style="list-style-type: none"> <li>• ...t voor POV (koppelen houding).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Meer nadruk op POV</li> <li>• Vaker gebruiken</li> </ul>

*Leerlingen in staat tot oplossing komen*  
*Leerlingen vinden leuk om zelf te ontdekken*  
*Alle leerlingen durven met ideeën te komen*  
*Leerlingen zijn creatief en gaan vertrouwen op creativiteit*  
*TTP werkt voor leerlingen, ze ervaren plezier*

...or TTP-lessen (en het  
 er)



# Resultaten Mechanismes

	<b>Successen</b>	<b>Knelpunten</b>
Leerlingen	<ul style="list-style-type: none"><li>• Veel leerlingen vinden TTP-les leuk</li><li>• Leerlingen zijn in staat tot eigen oplossingen</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Sommige leerlingen vinden het lastig een probleem aan te pakken</li><li>• Leerlingen denken dat ze het goed moeten doen (Verschillen tussen 'teams')</li></ul>
Didactiek	<ul style="list-style-type: none"><li>• TTP geschikt voor POV (koppelen aan kennis, houding).</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Meer nadruk op POV</li><li>• Vaker gebruiken</li><li>• Welke POV?</li></ul>
Curriculum	<ul style="list-style-type: none"><li>• TTP bruikbaar voor 'curriculum'</li><li>• Kan bij veel (maar niet alle) onderwerpen</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Tijd nodig voor TTP-lessen (en het kan efficiënter)</li></ul>
Opvattingen	Geen duidelijke verandering geconstateerd. Moeilijk meetbaar	



# Resultaten Mechanismes

Leerlin	<p><i>Ja ze leren gewoon eigenlijk dat ze niet voorgekauwd krijgen welke kant ze op moeten. [...] Ze konden op meer manieren het uitvogelen. Ik denk dat dat gewoon heel belangrijk is om te leren op een creatieve manier iets te gaan oplossen. En dat er ook niet perse een manier goed is, dat er veel meer manieren goed zijn.'</i></p>	vinden het aan te pakken dat ze het goed
		moeten doen (Verschillen tussen 'teams')
Didactiek	<ul style="list-style-type: none"> <li>TTP geschikt voor POV (koppelen aan kennis, probleem bes, houding).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Meer nadruk op POV</li> <li>Vaker gebruiken</li> <li>Welke POV</li> </ul>
	<p><i>De kanttekening is dat we denk ik wel echt dat er meer aandacht moet zijn op het einde voor die probleemoplossingsvaardigheden.</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Tijd nodig voor TI (en het kan efficiënter)</li> </ul>
Opvattingen	Geen duidelijke verandering geconsta	<p><i>Dit is een veel langduriger proces waarbij leerlingen hopelijk dan na een aantal jaren wel hier veel vaardiger in worden. Dit is niet iets wat heel snel binnen een maand of zo maar klaar is</i></p>





# Resultaten Mechanismes

	<b>Successen</b>	<b>Knelpunten</b>
Leerlingen	<ul style="list-style-type: none"><li>• Veel leerlingen vinden TTP-les leuk</li><li>• Leerlingen zijn in staat tot eigen oplossingen</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Sommige leerlingen vinden het lastig een probleem aan te pakken</li><li>• Leerlingen denken dat ze het goed moeten doen (Verschillen tussen 'teams')</li></ul>
Didactiek	<ul style="list-style-type: none"><li>• TTP geschikt voor POV (koppelen aan kennis, houding).</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Meer nadruk op POV</li><li>• Vaker gebruiken</li><li>• Welke POV?</li></ul>
Curriculum	<ul style="list-style-type: none"><li>• TTP bruikbaar voor 'curriculum'</li><li>• Kan bij veel (maar niet alle) onderwerpen</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Tijd nodig voor TTP-lessen (en het kan efficiënter)</li></ul>
Opvattingen	Geen duidelijke verandering geconstateerd. Moeilijk meetbaar	



# Resultaten Mechanismes

	Successen	Knelpunten
	<p><i>Je kan vrij veel dingen op deze manier aanpakken. Het is alleen wel, het kost veel tijd. Als je in tijdnood zit dan gaat het niet lukken. Want eigenlijk [...] kan het veel efficiënter.[...] Het kan veel gericht. Maar het is wel echt denk ik nuttig om zoiets te doen. Maar dan moet je het ook vaker doen. Je moet een soort houding van hoe ga ik een probleem aanpakken. Die moet je zien te creëren. Dus ja, het is nuttig, maar moet wel, je moet tijd voor hebben'</i></p>	
Didactiek	<ul style="list-style-type: none"> <li>TTP geschikt voor POV (aan kennis, houding).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Meer nadruk op POV</li> <li>Vaker gebruiken</li> <li>Welke POV?</li> </ul>
Curriculum	<ul style="list-style-type: none"> <li>TTP bruikbaar voor 'curriculum'</li> <li>Kan bij veel (maar niet alle) onderwerpen</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Tijd nodig voor TTP-lessen (en het kan efficiënter)</li> </ul>
Opvattingen	Geen duidelijke verandering geconstateerd. Moeilijk meetbaar	

leerlingen vinden het probleem aan te pakken en denken dat ze het goed doen (tussen 'teams')



# Resultaten Mechanismes

	<b>Successen</b>	<b>Knelpunten</b>
Leerlingen	<ul style="list-style-type: none"><li>• Veel leerlingen vinden TTP-les leuk</li><li>• Leerlingen zijn in staat tot eigen oplossingen</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Sommige leerlingen vinden het lastig een probleem aan te pakken</li><li>• Leerlingen denken dat ze het goed moeten doen (Verschillen tussen 'teams')</li></ul>
Didactiek	<ul style="list-style-type: none"><li>• TTP geschikt voor POV (koppelen aan kennis, houding).</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Meer nadruk op POV</li><li>• Vaker gebruiken</li><li>• Welke POV?</li></ul>
Curriculum	<ul style="list-style-type: none"><li>• TTP bruikbaar voor 'curriculum'</li><li>• Kan bij veel (maar niet alle) onderwerpen</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Tijd nodig voor TTP-lessen (en het kan efficiënter)</li></ul>
Opvattingen	Geen duidelijke verandering geconstateerd. Moeilijk meetbaar	



## Resultaten: Opbrengsten

Conjecturemap- thema	opbrengsten
TTP-opdrachten	<ul style="list-style-type: none"><li>• Vaker TTP-opdrachten kiezen of ontwerpen (9)</li><li>• Databestand?</li></ul>
TTP-didactiek	<ul style="list-style-type: none"><li>• Delen van de didactiek gebruiken</li><li>• Verkorte vorm</li><li>• Weinig ruimte om gehele les aan één opdracht te besteden</li></ul>
Antwoordgericht	<ul style="list-style-type: none"><li>• Meer doorvragen/ doorspelen (7)</li></ul>
POV	<ul style="list-style-type: none"><li>• Geen duidelijke verandering</li></ul>



# Resultaten: Opbrengsten

Conjecturemap-thema	opbrengsten
TTP-opdrachten	<ul style="list-style-type: none"><li>• Vaker TTP-opdrachten kiezen of ontwerpen (9)</li><li>• Databestand?</li></ul>
TTP-didactiek	<ul style="list-style-type: none"><li>• Delen van de didactiek gebruiken in verkorte vorm</li></ul>

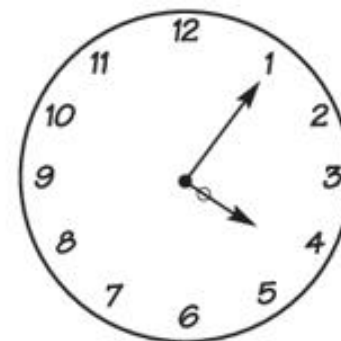
*Als ik voor die eerste cyclus een boek open sloeg dan deed ik gewoon vooral wat er in het boek stond. Nu zie ik wel meer van oke dit is misschien een leuke opdracht om op die manier aan te gaan pakken.*

*Ik ga vanmiddag weer beginnen met een TTP-opdracht in een nieuw hoofdstuk. Je hebt zo veel mogelijkheden voor die opgaven. Er zijn een paar onderwerpen die iets te specifiek zijn waar je wel moet uitleggen*



## Kleine en grote wijzer van een klok

- 1 a Hoeveel graden draait de grote wijzer in een uur?  
b Hoeveel graden draait de grote wijzer in een minuut?
- 2 a Hoeveel graden draait de kleine wijzer in een uur?  
b Hoeveel graden draait de kleine wijzer in een minuut?



4:05 uur

## Hoeken berekenen bij een klok

Je kunt voor elk tijdstip berekenen hoeveel graden de hoek tussen de grote en de kleine wijzer van een klok is. Je gebruikt het volgende.

- In een minuut draait de grote wijzer  $6^\circ$ .
- In een minuut draait de kleine wijzer  $\frac{1}{2}^\circ$ .

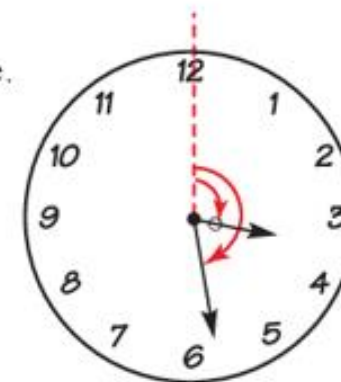
De hoek tussen de wijzers om 3:28 uur bereken je als volgt.

Vanuit de verticale stand is

- de grote wijzer  $28 \times 6^\circ = 168^\circ$  gedraaid
- de kleine wijzer  $(3 \times 60 + 28) \times \frac{1}{2}^\circ = 208 \times \frac{1}{2}^\circ = 104^\circ$  gedraaid.

De hoek tussen de grote en de kleine wijzer is dus

$$168^\circ - 104^\circ = 64^\circ.$$



3:28 uur

- 3 Bereken de hoek tussen de wijzers van een klok om
  - a 4:23 uur
  - b 5:48 uur
  - c 10:08 uur
  - d 12:56 uur



## Resultaten: Opbrengsten

Conjecturemap- thema	opbrengsten
TTP-opdrachten	<ul style="list-style-type: none"><li>• Vaker TTP-opdrachten kiezen of ontwerpen (9)</li><li>• Databestand?</li></ul>
TTP-didactiek	<ul style="list-style-type: none"><li>• Delen van de didactiek gebruiken</li><li>• Verkorte vorm</li><li>• Weinig ruimte om gehele les aan één opdracht te besteden</li></ul>
Antwoordgericht	<ul style="list-style-type: none"><li>• Meer doorvragen/ doorspelen (7)</li></ul>
POV	<ul style="list-style-type: none"><li>• Geen duidelijke verandering</li></ul>



## Resultaten: Opbrengsten

Conjecturemap-thema	opbrengsten
TTP-opdrachten	<ul style="list-style-type: none"><li>• Vaker TTP-opdrachten kiezen of ontwerpen (9)</li><li>• Databestand?</li></ul>
TTP-didactiek	<ul style="list-style-type: none"><li>• Delen van de didactiek gebruiken</li><li>• Verkorte vorm</li><li>• Weinig ruimte om hele les aan één opdracht te</li></ul>

*[ik gebruik] eigenlijk alle vier de fases, maar een beetje meer in het kort, dus het probleem is iets kleiner. Ze gaan iets korter aan de slag. De nabespreking is ook iets korter [...]. Of Ja, nou kijk, ik doe het allemaal niet zo uitgebreid als in zo'n les.*

*Ik doe zo'n soort opdracht misschien net iets vaker. Niet per se altijd een hele les, maar wel het idee van hoe de les is opgebouwd dat ik dat vaker inzet.*





## Resultaten: Opbrengsten

Conjecturemap- thema	opbrengsten
TTP-opdrachten	<ul style="list-style-type: none"><li>• Vaker TTP-opdrachten kiezen of ontwerpen (9)</li><li>• Databestand?</li></ul>
TTP-didactiek	<ul style="list-style-type: none"><li>• Delen van de didactiek gebruiken</li><li>• Verkorte vorm</li><li>• Weinig ruimte om gehele les aan één opdracht te besteden</li></ul>
Antwoordgericht	<ul style="list-style-type: none"><li>• Meer doorvragen/ doorspelen (7)</li></ul>
POV	<ul style="list-style-type: none"><li>• Geen duidelijke verandering</li></ul>



*Ik leg denkproces nu meer bij leerlingen*

*Ik laat tijdens besprekingen meer antwoorden door de leerlingen geven*

*Wat mij het meeste bijgebleven is en waar ik zelf ook weer meer probeer gebruik van te maken is als een leerling ergens iets over zegt, dan niet direct zelf als docent op te reageren, maar aan een andere leerling te vragen [...] zonder direct in de ja of nee, goed fout te gaan zitten.*

## sten

n

-opdrachten kiezen of ontwerpen (9)  
nd?

de didactiek gebruiken

orm

nte om gehele les aan één opdracht te

den

Antwoordgericht

- Meer doorvragen/ doorspelen (7)

POV

- Geen duidelijke verandering



## Conclusie en discussie

- Docenten zijn positief over TTP, zeggen er iets mee te doen, maar ervaren ook weinig ruimte in het curriculum. Fase 3 en 4 behoeven aandacht
- LS geschikt voor leren over TTP, maar tijdroven
- Schoolcontext en houding over het algemeen positief.
  
- TTP –POV relatie versterken
- Uitvoering TTP-didactiek meer ondersteunen

### Beperkingen

- Kleinschalig
- Hoe gaat het verder?



	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4
Heuristieken	Het probleem kan gericht zijn op het gebruik van bepaalde heuristieken.	Leerlingen kunnen heuristieken inzetten om het probleem te verkennen.	Leerlingen kunnen vertellen hoe het probleem opgelost hebben en welke heuristieken daarbij geholpen hebben.  Docenten kunnen deze heuristieken expliciteren.	Docenten kunnen samenvatten welke heuristieken bijdragen aan het oplossen van vergelijkbare typen problemen.
Metacognitie	De docent kan benadrukken dat het goed is het probleem goed te verkennen en analyseren. Leerlingen kunnen zichzelf reguleren bij het verkennen en analyseren van het probleem.	Mogelijk gebruiken leerlingen metacognitieve vaardigheden. Docenten kunnen hints geven gericht op metacognitieve vaardigheden en monitoring zoals plannen, monitoren van voortgang en evalueren.	Leerlingen kunnen vertellen hoe ze tot een uitwerking zijn gekomen, hoe ze hun antwoord checken, hoe ze een denkfout hebben ontdekt etc.  Docenten kunnen doorvragen op metacognitieve vaardigheden en deze modellen of toelichten.	Docenten kunnen samenvatten welke metacognitieve vaardigheden gebruikt kunnen worden.
Houding	De manier van presenteren is er op gericht leerlingen te motiveren om het probleem aan te pakken.	Leerlingen kunnen zich verdiepen in het probleem en kunnen zichzelf blijven motiveren. Docenten kunnen stimuleren om door te zetten.	Docenten kunnen expliciteren dat nieuwe ideeën ontstaan door bijvoorbeeld door te zetten of opnieuw te beginnen.	Docenten kunnen benoemen op welke manier de houding bijdraagt aan het oplossen van een probleem.



# Een voorbeeld



### Theorie B De formule opstellen van een lijn die evenwijdig is met een gegeven lijn

Weet je dat het punt  $P(3, 5)$  op de lijn  $l: y = 2x + b$  ligt, dan kun je  $b$  berekenen. Je vult daartoe in de formule van de lijn  $x = 3$  en  $y = 5$  in.

Je krijgt  $5 = 2 \cdot 3 + b$ .

En dit geeft  $b = -1$ .

In het voorbeeld zie je hoe je dit gebruikt om de formule van de lijn  $l$  op te stellen die door een gegeven punt gaat en evenwijdig is met een gegeven lijn.

### Voorbeeld

De lijn  $k$  gaat door het punt  $A(18, 6)$  en is evenwijdig met de lijn  $m: y = \frac{1}{2}x + 13$ .

a Stel de formule van  $k$  op.

b Bereken de coördinaten van het snijpunt  $B$  van lijn  $k$  met de  $x$ -as.

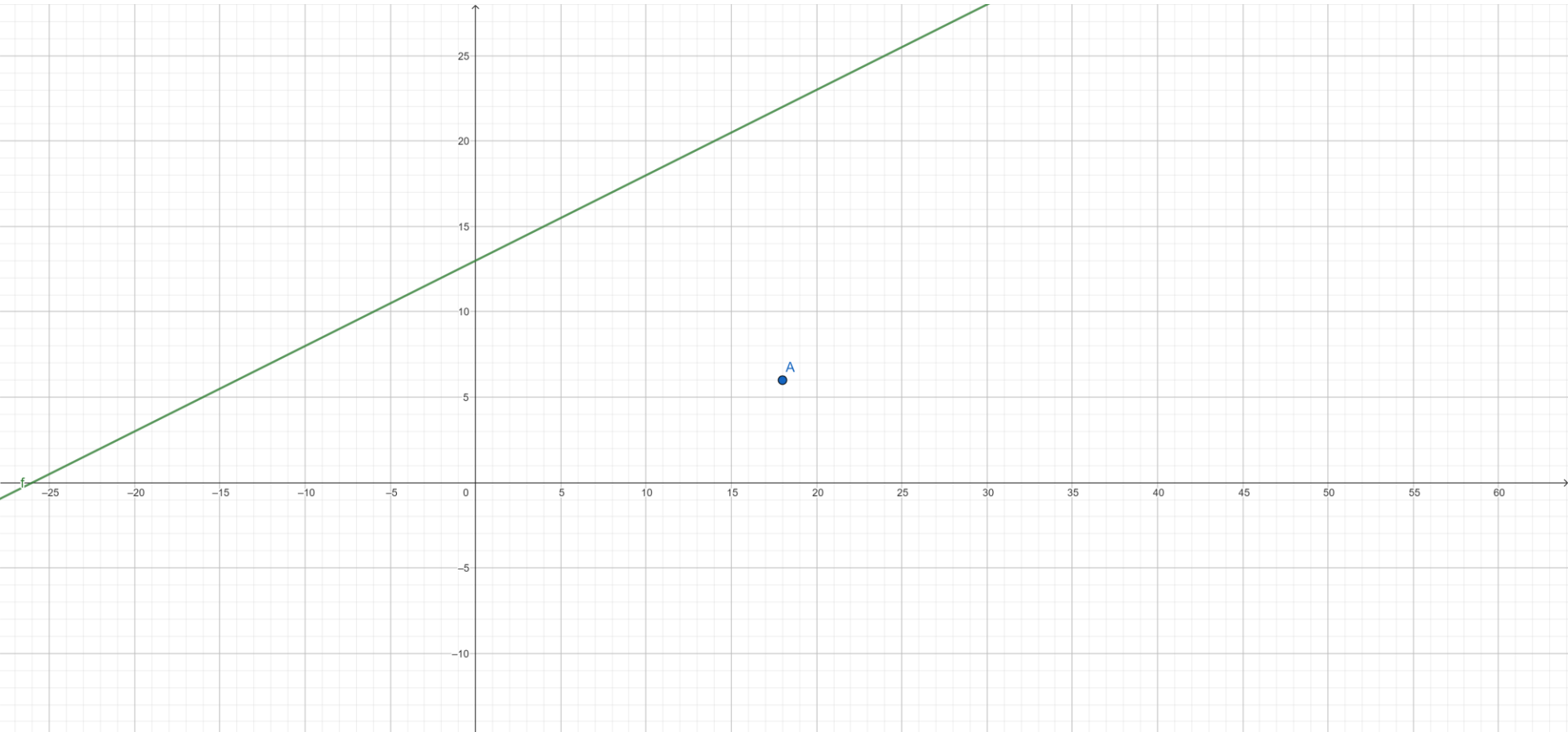
*Uitwerking*

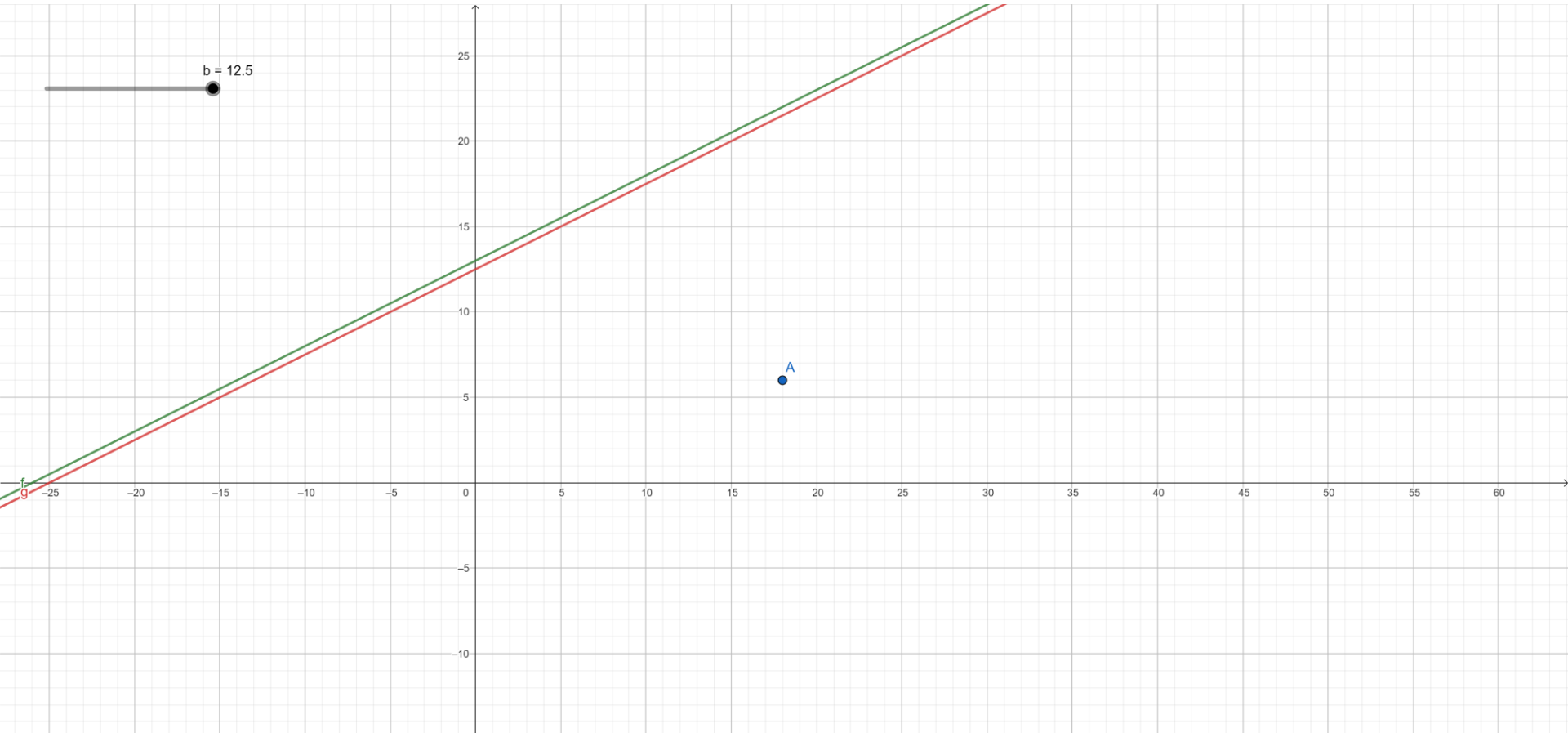
a  $k: y = ax + b$  met  $a = rc_k = rc_m = \frac{1}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(18, 6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot 18 + b = 6 \\ 9 + b = 6 \\ b = -3 \end{array}$$

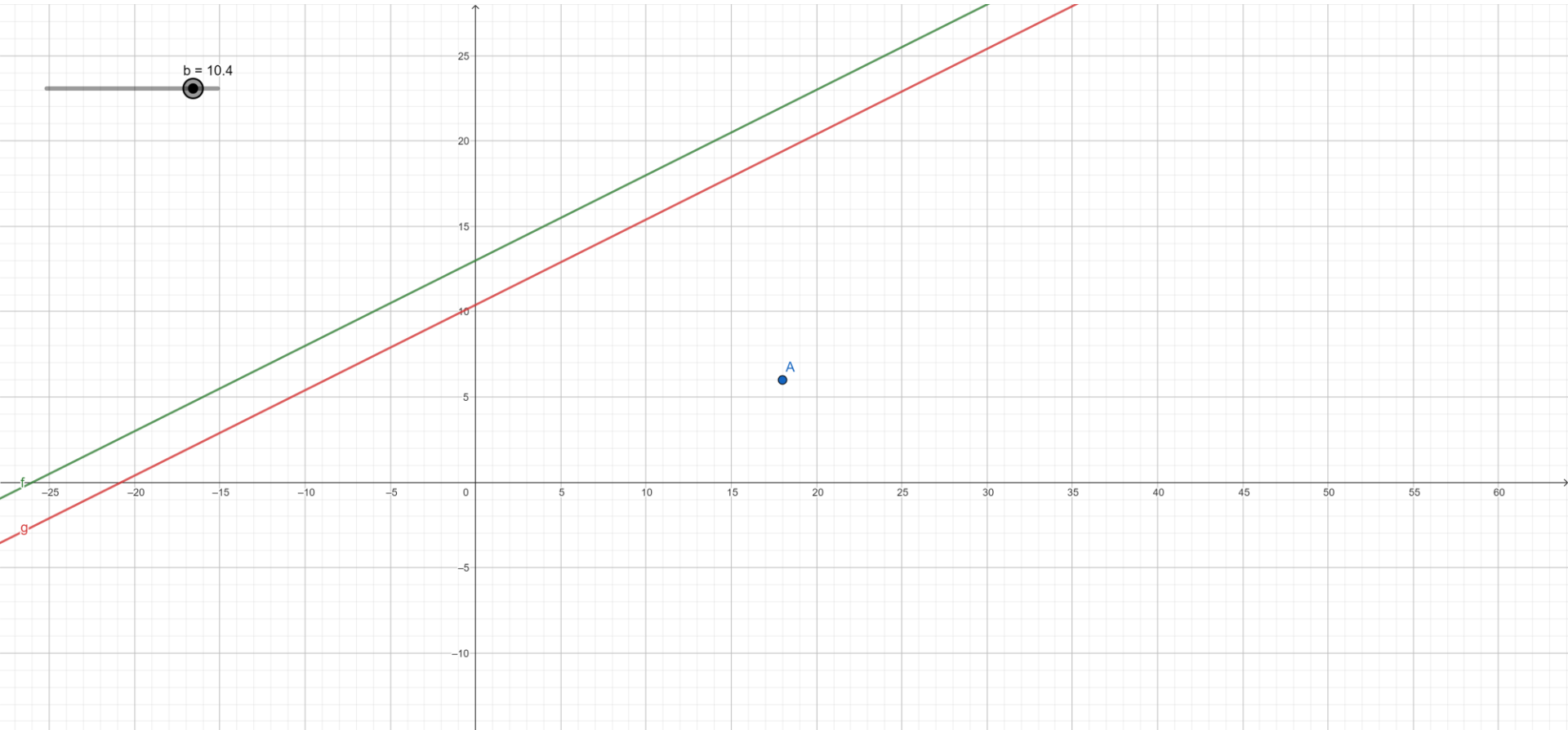
Dus  $k: y = \frac{1}{2}x - 3$ .

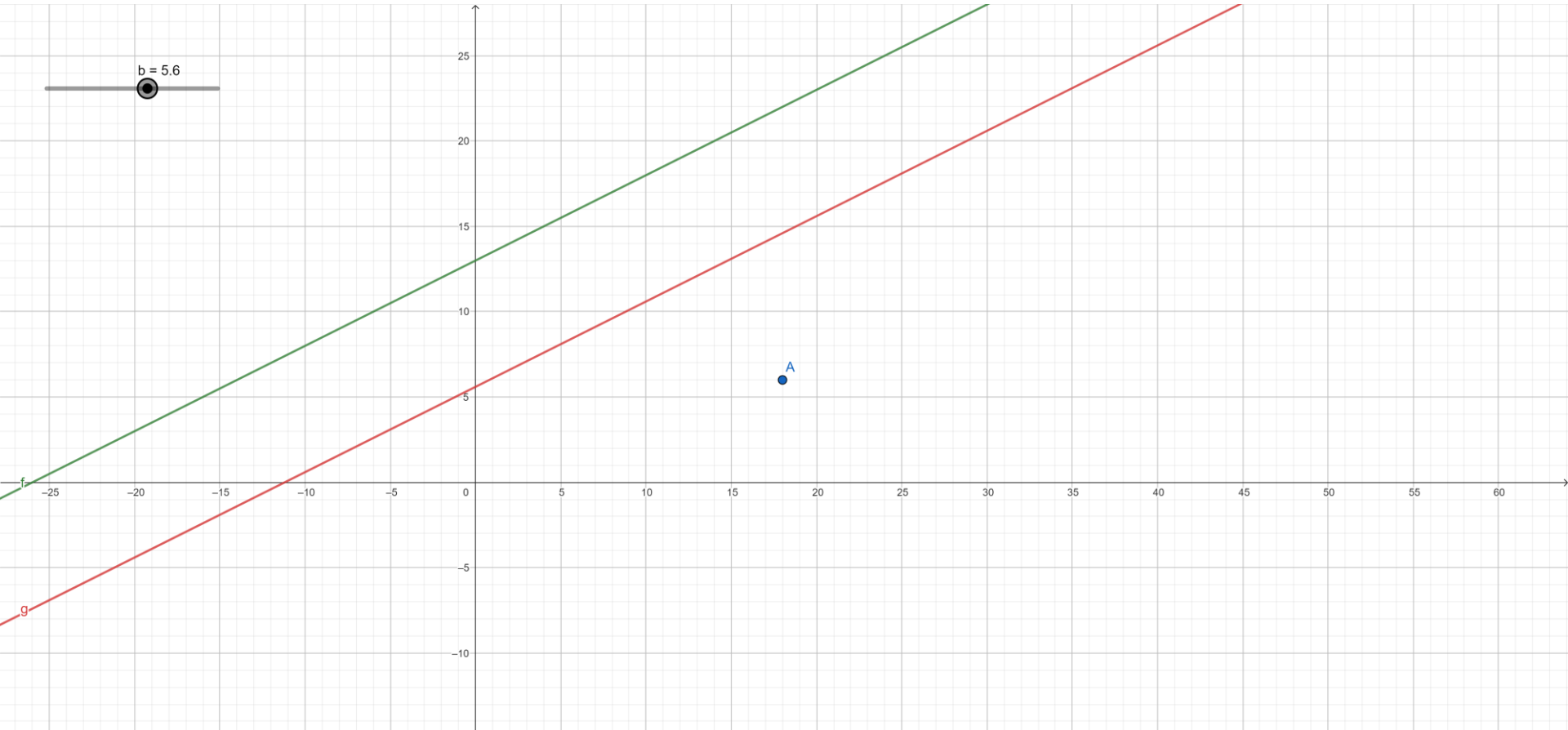
Bron, Getal en  
Ruimte, VWO A/C  
deel 1 (11<sup>e</sup> editie)

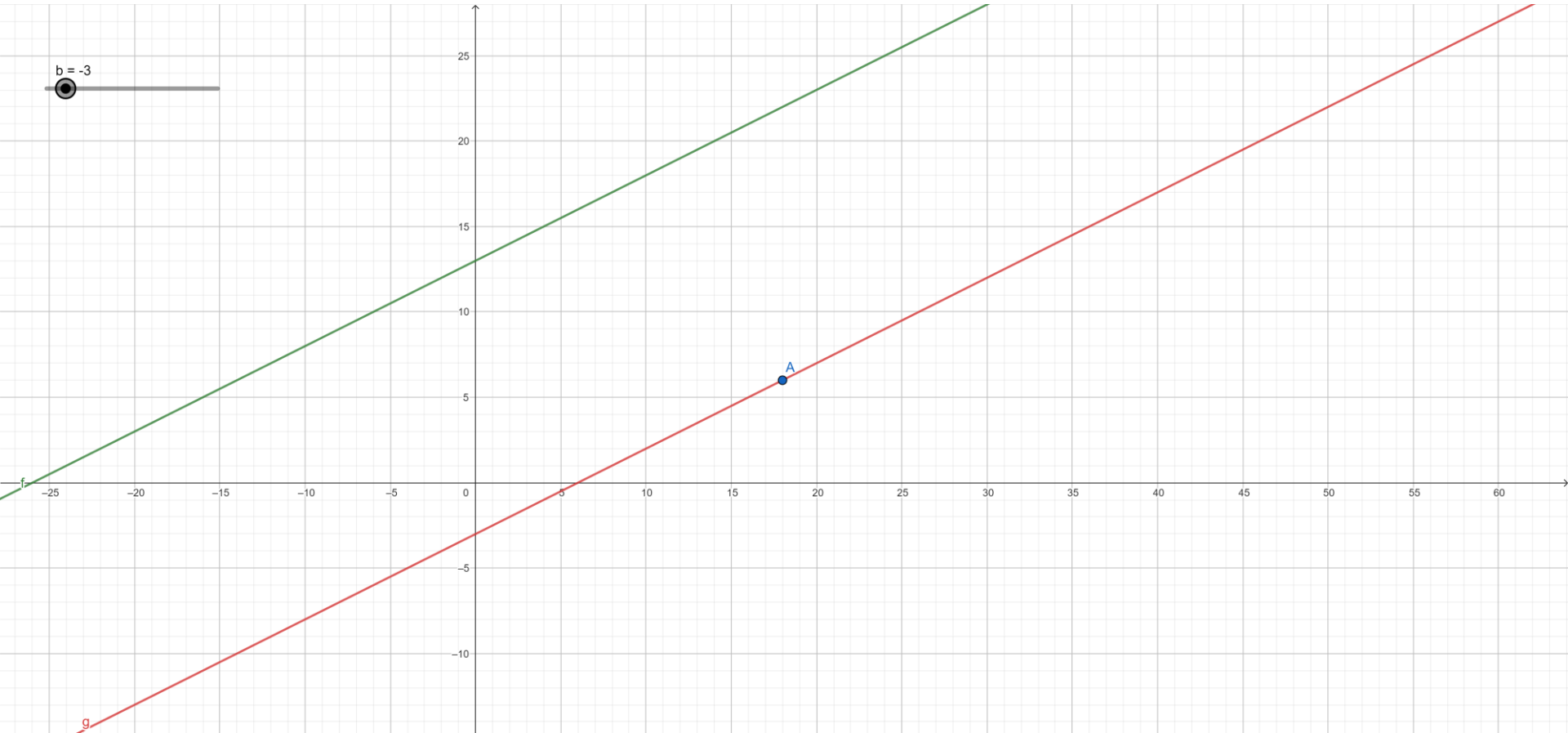














# Hoe verder?

## Docenten:

- Ondersteuning via website [www.ttpwiskunde.nl](http://www.ttpwiskunde.nl)
- Mogelijk: uitvoeren TTP-LS traject

## Scholen:

- Doorlopende leerlijn opzetten

## RUG-NHL:

- Vervolgproject
- Verder werken aan ontwikkelen content website.



# De afsluiting





# Opzet van de dag verder

## 11.30 – 12:30 Workshopronde 1

**Workshop 1A: TTP in de onderbouw havo/vwo**, Anneke Pol, Rémon Kooi

**Workshop 1B: De ins en outs van Lesson Study toegepast op Teaching Through Problemsolving**, S. de Vries, M.Minderhoud,

**Workshop 1C: Zelf ervaren: Hoe gaat een TTP-les?** Gerrit Roorda

## 12:30-13:30 Lunch

## 13:30 – 14:30 Workshopronde 2

**Workshop 2A Klassengesprekken in de wiskundeles**, Chris Kooloos

**Workshop 2C. Hoe kun je TTP inzetten bij lessen differentiaal- en integraalrekening?** Sibren Stienstra

## 14:30 – 14:45 Theepauze

## 14:45 – 15:30 + 15:30 – 15:45 Panelgesprek en afsluiting



# Bedankt voor de aandacht Vragen?



# Referenties

- De Vries, S., & Uffen, I. (2020). Facilitating a lesson study team to adopt an inquiry stance. In *Stepping up Lesson Study* (pp. 94-105). Routledge.
- Felmer, P. L., Pehkonen, E., & Kilpatrick, J. (2016). *Posing and solving mathematical problems*. Springer International Publishing.
- Fujii, T. (2017). Lesson study and teaching mathematics through problem solving: The two wheels of a cart. In M. Quaresma et al.(eds): *Mathematics lesson study around the world: Theoretical and methodological issues* (pp. 1–21). New York, NY: Springer.
- Groves, S., Doig, B., Vale, C., & Widjaja, W. (2016). Critical factors in the adaptation and implementation of Japanese Lesson Study in the Australian context. *ZDM, the International Journal on Mathematics Education*, 48, 501-512.
- Inspectie van het Onderwijs (2019). *De staat van het onderwijs, 2019*.
- Lewis, C., Perry, R., & Murata, A. (2006). How should research contribute to instructional improvement? The case of Lesson Study. *Educational Researcher*, 35, 3-14.
- Sandoval, W. (2014). Conjecture mapping: An approach to systematic educational design research. *Journal of the learning sciences*, 23(1), 18-36.
- Takahashi, A., Lewis, C., & Perry, R. (2013). A US lesson study network to spread teaching through problem solving. *International Journal of Lesson and Learning Studies*, 2, 237-255.





# Aanwijzingen voor probleemoplossen

- › Probleem oplossen: niet apart onderwerp, maar als onderdeel van het leren van wiskunde.
- › Docenten: kiezen van goede taken en organiseren van klasseggesprek.
- › Zorg dat leerlingen betrokken zijn in een varieteit aan probleemoplos activiteiten:
  - Meerdere oplossingen vinden
  - Exploreren van wiskundige problemen.
  - Onderbouwen van je oplossing
  - Generalisaties maken.
- › Lester, F. K., & Cai, J. (2016). Can Mathematical Problem Solving Be Taught? Preliminary Answers from 30 Years of Research. In P.L. Felmer, E.Pekhonen & J. Kilpatrick, *Posing and solving mathematical problems*. Springer, Cham.



# Aanwijzingen voor de effecten van deze didactiek

- Japan
- Boaler
- Meer theoretisch



## Theorie B Combinaties

Na een schoolfeest maken drie leerlingen de zaal schoon. De leerlingen Annelies, Bert, Cindy, Daan en Evelien stellen zich beschikbaar.

Op hoeveel manieren is uit deze vijf leerlingen een schoonmaakploeg van drie leerlingen te vormen?

De eerste leerling kun je uit vijf leerlingen kiezen, de tweede uit vier en de derde uit drie.

Toch is het antwoord  $5 \times 4 \times 3$  niet goed!

Je moet er namelijk rekening mee houden dat de schoonmaakploeg ABD (Annelies, Bert, Daan) hetzelfde is als de schoonmaakploegen ADB, BAD, BDA, DAB en DBA. De leerlingen hebben binnen de schoonmaakploeg immers geen speciale taak.

De volgorde doet er dus niet toe.

Deze  $3! = 6$  permutaties van A, B en D tellen dus maar voor één. En zo tellen ook de zes permutaties van BCE maar voor één.

Van de  $5 \times 4 \times 3 = 60$  mogelijke drietallen zijn er telkens  $3! = 6$  hetzelfde.

Het aantal mogelijke drietallen is dus  $\frac{5 \times 4 \times 3}{3!} = \frac{60}{6} = 10$ .

Is bij het kiezen van drie dingen uit vijf dingen de volgorde *niet* van belang, zoals bij de schoonmaakploeg, dan spreken we van het aantal **combinaties** van 3 uit 5.

Het aantal combinaties van 3 uit 5 noteren we als  $\binom{5}{3}$ .

Spreek uit: vijf boven drie.

ABC	ACB	BAC	BCA	CAB	CBA	←
ABD	ADB	BAD	BDA	DAB	DBA	←
ABE	AEB	BAE	BEA	EAB	EBA	←
ACD	ADC	CAD	CDA	DAC	DCA	←
ACE	AEC	CAE	CEA	EAC	ECA	←
ADE	AED	DAE	DEA	EAD	EDA	←
BCD	BDC	CBD	CDB	DBC	DCB	←
BCE	BEC	CBE	CEB	EBC	ECB	←
BDE	BED	DBE	DEB	EBD	EDB	←
CDE	CED	DCE	DEC	ECD	EDC	←

telt steeds maar voor één



# Wiskundeonderwijs in Nederland

## Heuristisch wiskunde-onderwijs

Verslag van een onderwijsexperiment



Anne van Streun



**T 20** | ▶▶ 25] Herleid.

a  $2p^2q \cdot 3p^3q^2$       c  $\frac{48x^4y^2}{8x^3y}$       e  $(2p^2)^4 + (-4p^4)^2$   
b  $3ab^2 \cdot 4a^2 - 5a^3 \cdot b^2$       d  $(-4a^3)^3$       f  $\frac{(3x^2y)^2}{12xy}$

**21** Herleid.

a  $x^2 \cdot x^3$       c  $4a^2b \cdot 5a^3b^2$       e  $5x^2y \cdot 2x - 3x^3y$   
b  $2p^3 \cdot 3p^2$       d  $-2p^4q^3 \cdot -3pq$       f  $12a^4b \cdot \frac{1}{4}ab - 8ab$

**22** Herleid.

a  $(a^3)^4$       c  $(q^3)^4 + (q^6)^2$       e  $10x^6 - 5(x^2)^3$   
b  $(p^2)^3 \cdot (p^3)^5$       d  $6a \cdot (a^4)^2$       f  $5(x^8)^2 - 3x^{10}$

**23** Herleid.

a  $(p^2q)^3$       c  $(-5x^2y^3)^2$       e  $(3a)^2 \cdot (2a^2)^3$   
b  $(3x^2)^3$       d  $(-4ab^4)^2$       f  $(3a^3)^2 + (2a^2)^3$

**24** Herleid.

a  $\frac{12x^6}{4x^2}$       c  $\frac{24a^4b^2}{6ab}$       e  $\frac{14x^3y^2}{24x^2y}$   
b  $\frac{5x^{10}}{15x^5}$       d  $\frac{-15p^6q}{5p^2q}$       f  $\frac{(2ab)^3}{(3ab)^2}$

**A 25** Herleid.

a  $2a^2 \cdot 4a^3$       e  $-(3a^4)^2$   
b  $-5a^7 \cdot a^3$       f  $(-2a^2)^5$   
c  $\frac{-28a^6}{7a}$       g  $(-a^3)^3$   
d  $(-4a)^4$       h  $(5a)^3 \cdot -3a$

**A 26** Herleid.

a  $(ab)^4 \cdot a$       d  $(3a)^3 - 8a^3$   
b  $(-2ab)^3 \cdot b$       e  $(\frac{1}{2}a)^2 + (-a)^2$   
c  $(3a)^2 + (2b)^2$       f  $(5a^4)^2 + (-a^2)^4$



21-3-2023 | 69

Bron, Getal en Ruimte,  
havo A deel 1 (11<sup>e</sup>  
editie)





rijksuniversiteit  
groningen



21-3-2023 | 70