Gerrit Roorda, Sibren Stienstra, Paul Durenkamp

Wiskunde begrijpen met teaching through problemsolving

In de leer bij dr. Takahashi

Het thema 'wiskunde onderwijzen door probleemoplossen', vaak aangeduid met de Engelse term Teaching Through Problemsolving (TTP), houdt ons al langere tijd bezig. We denken dat leerlingen die regelmatig les krijgen volgens de TTP-didactiek hun wiskundige kennis en vaardigheden versterken, en tegelijkertijd leren hoe je wiskundeproblemen aanpakt. De TTP-didactiek is in een project in Nederland op enkele scholen op beperkte schaal getest (zie Roorda et., 2023). In het project bleek dat docenten dit een mooie didactiek vonden, maar dat er ook vragen waren zoals: hoe kun je de cultuur in de klas zo beïnvloeden dat leerlingen wiskundeproblemen durven aanpakken en hun ideeën durven te delen; hoe kun je TTP-didactiek in opeenvolgende lessen implementeren? Om zelf te blijven leren over dit onderwerp bezochten wij, Paul, Sibren en Gerrit, drie demo-lessen van Dr. Akihiko Takahashi in de Hummeltofteskolen in Kopenhagen. Takahashi is een expert op dit gebied; hij schreef in 2021 een boek over de TTP-didactiek. In de demo-lessen demonstreerde hij hoe je TTP-didactiek in opeenvolgende lessen uitvoert; de lessen waren zeer inspirerend. In dit artikel delen we enkele ervaringen en reflecties. Het doel van het artikel is om een aantal thema's te bespreken die inzicht geven hoe TTP-didactiek in Nederland verder geïmplementeerd zou kunnen worden.

Dr. Takahashi en de TTP-didactiek

De naam Akihiko Takahashi (zie Afb. 1) is sterk verbonden met Lesson Study (zie bijvoorbeeld Takahashi et al., 2022). Dr. Takahashi is leider van het Lesson Study Immersion programma in Japan. Dit programma is erop gericht reken- en wiskundedocenten vanuit de hele wereld ervaring te laten opdoen met, of beter gezegd onder te dompelen in, Japanse Lesson Study. In 2016 nam Gerrit deel aan dit programma. Hij participeerde als observator in zeven reken- en wiskundelessen die door Japanse docenten werden gegeven en nabesproken. Hoewel het programma gericht was op Lesson Study was het met name de didactiek in lessen die erg aansprak.

Deze didactiek wordt aangeduid met de naam TTP (zie Takahashi, 2021). Kenmerken van de aanpak zijn dat leerlingen betrokken worden in wiskundelessen door het oplossen van problemen; dat de docent de leerlingen naast kennis over wiskunde ook lessen wil leren over durf, doorzetten en probleemaanpak, en dat in het klassengesprek oplossingen van leerlingen uitgebreid worden besproken om tot een gemeenschappelijk begrijpen te komen.

Tegenwoordig werkt Takahashi aan de DePaul University in Chicago waar hij wiskunde en wiskundedidactiek doceert. Hij ondersteunt basisscholen in Amerika om LS en TTP te implementeren, gebaseerd op zijn expertise uit Japan. Daarnaast is hij internationaal actief met lezingen, workshops, onderzoek en…. demo-lessen. Hieronder wordt beschreven wat demo-lessen inhouden, en waarom Takahashi demo-lessen geeft.

Afbeelding 1: Dr. Akihiko Takahashi

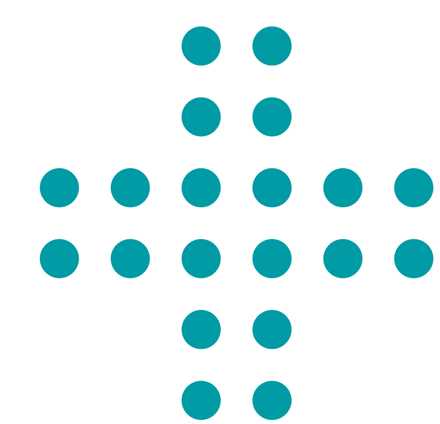
Demo-lessen

Takahashi was op uitnodiging van een Deense collega in Kopenhagen om drie demo-lessen te geven. Deze Deense collega, Jacob Bahn, is betrokken bij enkele scholen in Denemarken die TTP-didactiek willen implementeren. Eén klas, in dit geval een Deense 'brugklas', kreeg lessen van dr. T., zoals hij zich door de leerlingen liet noemen. We maakten deze drie lessen mee, met voor- en nagesprekken.

Het wiskundige thema van de lessen was de overgang van het rekenen met getallen naar algebra. Dit gebeurde aan de hand van 'stippensommen'; verderop meer daarover[1].
Takahashi hecht eraan om aan één en dezelfde klas drie demo-lessen te geven. Hij wil niet in één les een soort trucje voordoen, maar hij wil laten zien dat je met de leerlingen een situatie kan creëren waarin ze wennen aan een andere 'klassencultuur', waarin je met elkaar gericht bent op het begrijpen van wiskunde. In drie lessen laat Takahashi ook zien hoe je de input van de ene les gebruikt om in de volgende les daarop voort te bouwen. Dit kan enerzijds gaan over de inhoud: De docent kan in een les ontdekken hoe de leerstof door de verschillende leerlingen wordt begrepen en waar mogelijk nog misconcepties zitten. Anderzijds kan het gaan over de aanpak van opdrachten in de les. Leerlingen moeten namelijk aan het eind van een TTP-les een reflectie schrijven over wat ze geleerd hebben. Door reflecties van de vorige les te bespreken bij de start van een nieuwe les kan de docent laten zien wat belangrijke punten waren in de vorige les.

De eerste les

Een TTP-les kent normaal gesproken een opbouw in vijf stappen: Als eerste wordt eventuele voorkennis opgehaald, vervolgens presenteert de docent het probleem dat in de les centraal staat, de leerlingen werken enige tijd aan het probleem, daarna worden ideeën en oplossingen van leerlingen klassikaal besproken, en ten slotte is er tijd voor een samenvatting.
In les 1 werd, na een korte introductie, aan leerlingen gevraagd het aantal stippen in een eenvoudig stippenpatroon te vinden (zie Afb. 2). Het werd daarbij voor de leerlingen duidelijk dat je op verschillende manieren naar een stippenpatroon kan kijken.



Afbeelding 2 Stippenpatroon van les 1

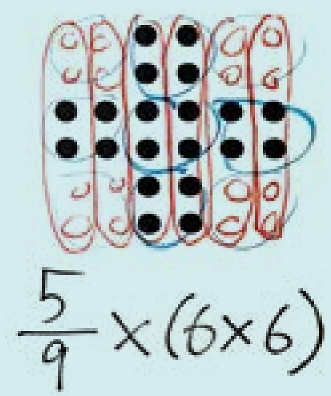
Om het aantal stippen te berekenen bedachten de leerlingen zes berekeningen. De eerste vijf waren: 2 × 10; 10 × 2; 5 × 4; 4 × 5 en nogmaals 4 × 5 (op een andere manier). Veel nadruk legde dr. T op het verschil in betekenis tussen 2 × 10; 10 × 2. In het eerste geval heb je twee groepen van 10 stippen, in het tweede geval 10 groepen van 2 stippen. Probeer zelf maar eens of je bij de vijf berekeningen de perspectieven kan bedenken om naar het stippenpatroon te kijken; de 'antwoorden' vind je onderaan dit artikel (zie Afb. 8). Eén leerling, zeg Jan, had nog een zesde berekening, namelijk ($\frac{5}{9} \times (6\times6)$).
Interessant was dat geen van de aanwezige docenten in de voorbereidingsbespreking deze aanpak had bedacht. Ook voor dr. T zelf was de berekening een verrassing. Maar hij besloot deze aanpak met de klas te bespreken. Daarbij zagen we mooi hoe dr. T. het klassengesprek organiseerde. Op pagina 22 volgt een deel van het klassegesprek met daarbij toelichtingen bij de uitspraken.

De les sluit af met reflectieve vragen. De algemene vraag: Wat heb je geleerd? Maar ook bijvoorbeeld: Welke aanpak van een klasgenoot vond je goed? Dat is een mooie vraag, omdat je gedwongen wordt na te denken over de aanpakken van andere leerlingen.
Op de blaadjes staan zinnen als: "*I learned to make mathematical expressions with dots*" of "*The way people interpret numbers and mathematics as a whole is different from person to person*."
Met les 1 heeft dr. T de sfeer gecreëerd: Je mag je eigen ideeën genereren. Je kunt verschillende aanpakken gebruiken voor een opdracht. Je kunt luisteren naar elkaars ideeën en je kunt de ideeën van anderen, soms na enige tijd, ook zelf uitleggen. Je kunt door samen na te denken een moeilijke berekening ($\frac{5}{9} \times (6\times6)$) toch begrijpen.

1 Takahashi heeft eerder demolessen gegeven in andere landen, bijvoorbeeld Ierland.
De video's van deze Ierse lessen zijn geheel te bekijken (Zie Les 1: https://youtu.be/n6cvgp7QLvs ; Les 2: https://youtu.be/oskFlEceJv8, Les 3: https://youtu.be/wz_J6FgLWHU).

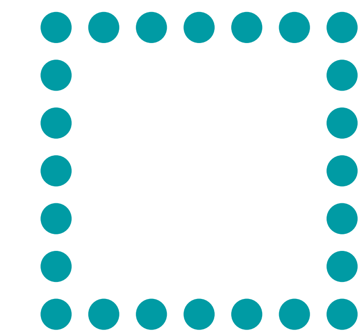
DEEL VAN HET KLASSENGESPREK (OP BASIS VAN NOTITIES OBSERVATOR)

T: *Wat zou Jan hebben gedacht. Kan iemand zijn gedachten lezen?* [Dr. T vraag niet aan Jan of hij kan uitleggen, maar schakelt de klas in om Jans denkwijze te reconstrueren].
Klas: ... (het blijft stil)
T: *Ziet iemand in de figuur 6 × 6?* [dr T. vereenvoudigt de vraag, maar geeft zelf geen antwoord]
Klas: .... [geen reactie]
T: *Ziet iemand waar 6 vandaan zou kunnen komen?* [een verdere vereenvoudiging van de vraag]
L: *Ja, ik zie het, en ik zie ook 6 × 6.*
T: *Kun je het uitleggen?*
L.: *Als je de figuur in de hoeken aanvult met stippen, dan zijn er 6 × 6 stippen.* (zie Afb 3.)



Afbeelding 3: Tekening op het bord

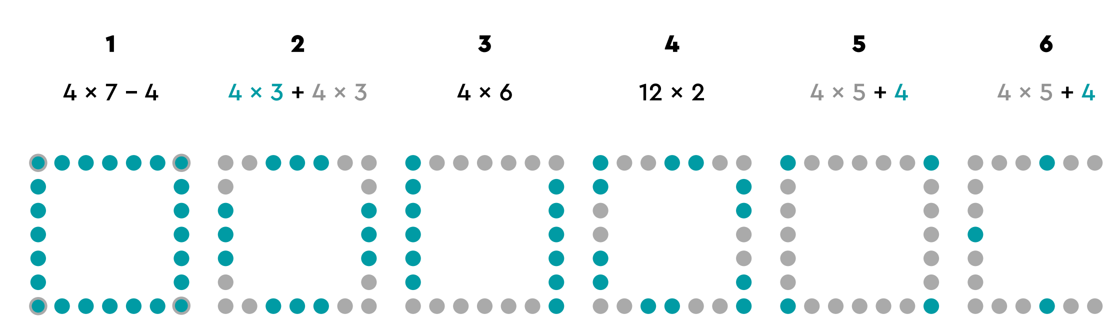
T: *Klopt dat, Jan, bedoel je dat met 6 × 6?* [De check of dit inderdaad Jans denkwijze was]
Jan: *Ja.*
T: *Iedereen akkoord?* [Het gaat om een gemeenschappelijk begrijpen]
K: [er wordt wat geknikt]
T: *Anke, kun je dan nog eens zeggen wat 6 × 6 precies is?* [Als iedereen akkoord is, vraagt dr T. vaak aan iemand om het nog eens toe te lichten]
A: *Als je in de hoeken er stippen bijzet krijg je een vierkant met 36 stippen.*
T: tekent nu in de figuur de extra stippen. [Soms laat T de leerling zelf tekenen, maar nu niet].
T: *OK, akkoord?*
Klas: knikt.
T: Dan moeten we nu nog bedenken waarom $\frac{5}{9}$. [In deze beschrijving geven we het vervolg van deze conversatie niet weer. De $\frac{5}{9}$ heeft te maken met het feit dat er, na aanvulling tot een 6 bij 6 vierkant, 9 groepjes van vier stippen zijn ontstaan, waarbij 5 van de 9 groepen het gegeven stippenpatroon vormen]


Afbeelding 4 Stippenpatroon les 2

De tweede les

De tweede les start met het voorlezen van enkele 'les-1-reflecties'. Niet willekeurig overigens, want Takahashi vraagt leerlingen op basis van wat ze op hebben geschreven. De reflecties die leerlingen voorlezen zijn waardevol voor alle leerlingen.
Vervolgens wordt het volgende probleem gepresenteerd, weer een stippenpatroon (Afb. 4): Hoeveel stippen staan er in de volgende figuur? Schrijf een wiskundige berekening op voor het aantal stippen.
Na enige tijd individueel en vervolgens in duo's te hebben gewerkt. Komen de volgende ideeën (zie Afb. 5). Steeds wordt de relatie gelegd tussen de berekening en het stippenpatroon. De leerlingen lijken het interessant te vinden dat er zoveel verschillende manieren zijn om naar hetzelfde patroon te kijken. Ook is er veel interesse in de denkwijzen van andere leerlingen.

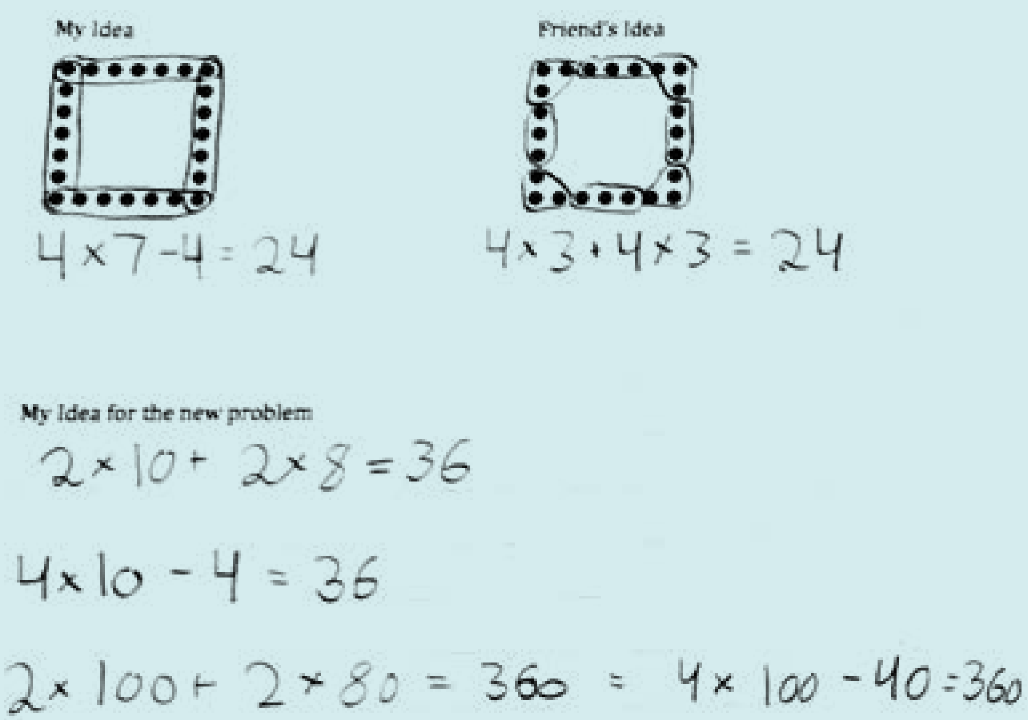
Nu vraagt Takahashi om een berekening voor dezelfde figuur met 10 bij 10 stippen te maken (zie rechts op Afb. 7). Essentieel bij de 'generalisatie' van 7 naar 10 stippen is dat duidelijk is wat er 'verandert' en wat 'gelijk' blijft. Neem bijvoorbeeld berekening nummer 3: Als de figuur verandert van 7 bij 7 naar 10 bij 10, verandert alleen de 6. Het inzicht dat de 6 hier geschreven moet worden als (7 – 1) maakt generalisatie naar 10 bij 10 mogelijk: Er zijn 4 × (10 – 1) stippen; de 4 verandert niet, die staat immers voor de vier zijden. Dit is de **essentie** om te snappen hoe je tot een formule zou kunnen komen voor het aantal stippen, dus de abstractiestap van een berekening met getallen, naar een berekening met 'letters'.
Als docent zouden we het nu wel willen 'uitleggen': "Kijk leerling, zie je dat je er een formule voor kunt maken". Er gebeurt echter iets bijzonders in deze les. We zien als observatoren dat Takahashi veel tijd besteedt aan de generalisatie van uitwerking 2. Die generalisatie zou moeten zijn, in wiskundige termen 4 × 3 + 4 × (zijde – 4). Wij vinden dat het langzaam gaat, we vragen ons af waarom zoveel tijd aan uitwerking 2, we merken dat de aandacht van de leerlingen wat wegzakt, het lijkt er ook op dat leerlingen het lastig vinden om zich uit te spreken in het Engels. Takahashi besluit het klassengesprek af te breken, en vraagt leerlingen nog de berekening op te schrijven voor hetzelfde patroon met 100 bij 100 stippen. Hij sluit niet af met de gebruikelijke samenvatting en reflectie, maar complimenteert de leerlingen en zegt: 'we gaan morgen verder'.



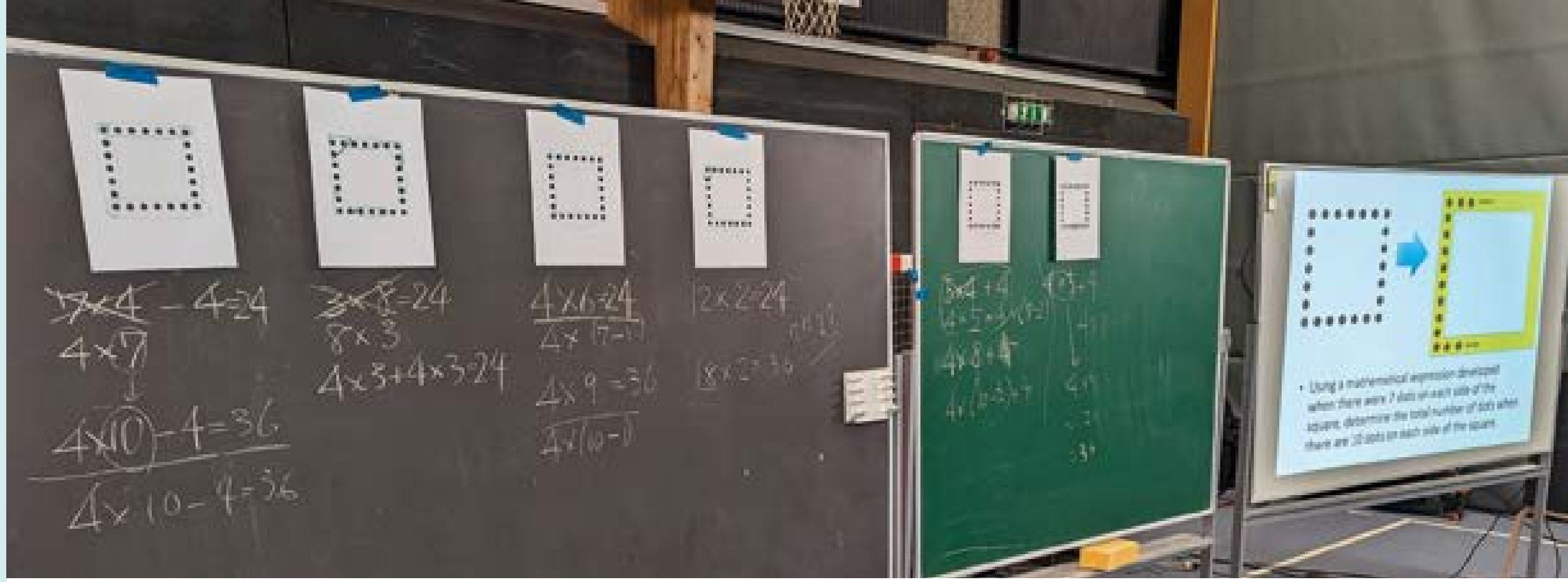
Afbeelding 5: Verschillende oplossingsstrategieën van leerlingen

DEEL VAN HET KLASSENGESPREK (OP BASIS VAN NOTITIES OBSERVATOR)

T: *Carla, kun je vertellen welke berekening je hebt gemaakt om het aantal stippen te berekenen in een 100 bij 100 figuur?* [dr T. weet dat de berekening niet klopt.]
C: *Ik weet al wat ik fout heb gedaan.*
T: Heel goed, maar wat was je berekening? [loopt naar de tafel] *Ik zie dat je hem al hebt weggegumd. Weet je nog wat er stond?*
C: 2 × 100 + 2 × 80 = 360 (zie Afb. 6, onderaan)).
T: *Kan iemand bedenken wat Carla gedacht heeft.* [Ook bij een onjuiste aanpak kun je nadenken over de denkwijze van een leerling].
[..., leerling L steekt een vinger omhoog]
L: *Als de figuur 10 bij 10 is, kun je het aantal tellen door 2 × 10 + 2 × 8. Misschien heeft Carla er een nul achter gezet.*
T: *Klopt dat Carla?*
C: *Ja, maar dat mag niet, want het zijn meer dan 80.*
T: *Hoeveel stippen zijn er dan over als je eerst twee zijkanten van 100 hebt geteld?*
C: *98, je moet 100 − 2 doen.*
T: *Wat betekent de 2 dan precies?*
Iemand anders: *De hoekjes heb je al geteld, dus die hoef je niet weer te tellen.*
T: *Akkoord? Goed dat je dat zelf hebt ontdekt Carla. Het lijkt me een goed idee dat je je vergissing niet weggumt, maar netjes doorstreept, en de verbetering eronder schrijft. Je kunt dan later weer zien wat je denkwijze is geweest en hoe je je denkwijze hebt verbeterd om tot een oplossing te komen.*



Afbeelding 6: Aantekening van Carla



Afbeelding 7: Foto van het bord

Het vervolg van de tweede les

In het nagesprek met observatoren legt Takahashi uit waarom hij besloot de les af te ronden. Hij legt uit dat hij bij het rondlopen en in het klassengesprek nog te veel reacties kreeg van leerlingen waaruit bleek dat ze de essentie nog niet begrepen. Dit is een belangrijk onderdeel van de TTP-didactiek: het monitoren van de leerlingen. Ze zijn daarmee volgens Takahashi nog niet allemaal toe aan de abstractiestap naar een formule.
In les 3 neemt Takahashi de tijd om alsnog terug te komen op de vorige les. Alle ideeën van les 2 zijn netjes op een rij op het bord gehangen (zie Afb 7.). Bij uitwerking 1, 3, en 5 zie je dat de stap naar 10 bij 10 is opgeschreven. Er volgt een mooi klassengesprek, waarin Takahashi specifiek leerlingen inschakelt die het moeilijk vonden, zoals uit berekeningen op hun werkblad was gebleken.
Als observatoren zou je denken: Mooi, de regel lijkt nu duidelijk, gauw naar de volgende som. Maar Takahashi zegt dat hij nog één uitwerking wil bespreken. Takahashi bespreekt namelijk nog een berekening die niet klopt. Op pagina 24 is dit gesprek weergegeven.
Takahashi heeft dus in de derde les veel tijd genomen om het probleem van de tweede les af te ronden. In de derde les volgt nog een laatste stippenopdracht die in verband met de beperkte tijd wat korter wordt besproken en een korte afsluitende reflectie.

Reflecties

Het onderwerp TTP heeft al langere tijd onze aandacht. De website www.ttpwiskunde.nl maakt duidelijk dat er allerlei TTP-materialen en ideeën ontwikkeld zijn in het project. Ondanks alle ervaringen tot nu toe, maakte het bijwonen van de demo-lessen dat we nieuwe perspectieven kregen op de TTP-didactiek. Hieronder wordt een aantal thema's besproken.

Tempo en differentiatie in de les

We merkten dat Takahashi veel tijd nam om alle leerlingen mee te krijgen en samen te begrijpen wat iedereen bedacht had. Toen hij in les 2 merkte dat leerlingen nog niet mee waren, nam hij de tijd om in les 3 door te gaan met het voorbeeld van les 2. Meerdere aanwezigen vroegen zich af of 'betere leerlingen' wel voldoende werden uitgedaagd. Volgens Takahashi leren de betere leerlingen veel van de verdieping die ontstaat door hetzelfde probleem van alle kanten te doorgronden. Ze leren veel van het onder woorden brengen van alle soorten oplossingen. Wij, als deelnemers met een andere achtergrond, zijn er nog niet helemaal uit. Het zou toch goed zijn om betere leerlingen tussendoor meer uit te dagen? Hoe past dit nu binnen de ideeën over differentiatie in onze wiskundelessen? Maar we zien ook dat het waardevol is om één en hetzelfde probleem echt goed te doorgronden, in plaats van snel te schakelen naar volgende 'sommetjes', wat in het Nederlandse wiskundeonderwijs vaak gebeurt.

Klassencultuur

Het was mooi om te zien dat Takahashi er in de loop van de drie lessen in slaagde om de leerlingen te laten merken dat allerlei dingen die ze bedacht hadden ertoe doen. Leerlingen zullen gevoeld hebben: fouten mag je maken, we kunnen leren van elkaars ideeën. De interacties bevatten vrijwel geen 'waardeoordelen' van de docent, zoals dat een oplossing 'mooi', 'goed' of juist 'fout' was. Vaak was de reactie juist: 'Zijn jullie het ermee eens? Kun je het toelichten?' Het is duidelijk dat TTP zowel een vakdidactische als een pedagogische aanpak is. De boodschap was: we kunnen leren van elkaar; probeer ideeën van anderen te begrijpen; je mag feedback geven op ideeën van anderen. Dit zal voor Nederlandse schoolklassen nog een uitdaging worden: Hoe creëer je een sfeer waarin ieder zijn ideeën durft te noemen?

Probleemoplossen of wiskunde begrijpen

In het Nederlandse project (Roorda et al., 2023) kozen we voor een focus op probleemoplossingsvaardigheden. We merkten dat deze demo-lessen gericht waren op het begrijpen van wiskunde meer dan op het probleemoplossen. Toch waren er zeker momenten waarop Takahashi probleemoplossingsvaardigheden expliciteerde, zoals het bevorderen van een probleemoplossende houding waar het maken van fouten niet erg is, maar juist tot leren leidt.
De naam Teaching through problem-solving kan het beeld oproepen dat de focus hiervan het probleemoplossen is. We merkten dat bij Takahashi de nadruk viel op *begrijpen* van wiskunde. De demo-lessen waren sterk centraal klassikaal georiënteerd. Het gaat dus niet om 'zelfontdekkend leren', maar om het, onder sterke begeleiding van een docent, leren van wiskunde vanuit de probleemoplossingsactiviteiten.

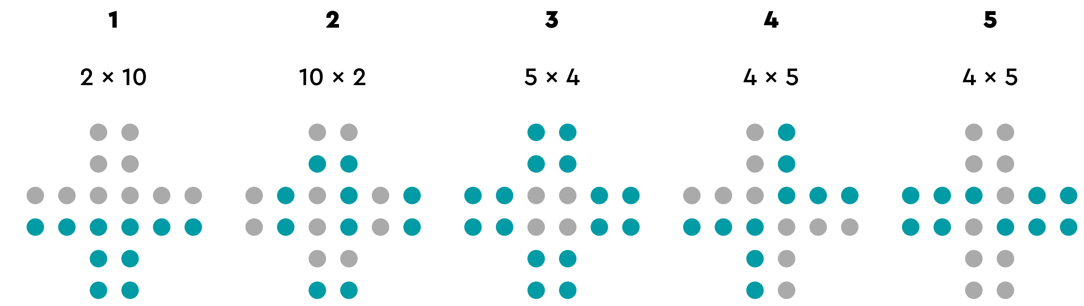
Wat vraagt het van docenten?

Het geven van een TTP-les vraagt veel vaardigheden van de docent. Om er enkele te noemen: Takahashi wilde in deze lessen dat alle leerlingen de cruciale stap van abstractie zouden begrijpen. Als docent moet je precies voor ogen hebben wat de cruciale stap is, wat de essentie is van de wiskunde die in het probleem naar voren komt. In de voorbereiding van de les zul je daar als docent goed bij stil moeten staan. Ook het monitoren van de antwoorden en afsluitende reflecties is een vaardigheid die veel overzicht vraagt. Dit monitoren moet inzicht geven welke leerlingen de docent wil inschakelen tijdens het klassengesprek. Met een volle baan ontbreekt de tijd om dit voor alle leerlingen te doen. Tegelijkertijd is een mooi aspect van het monitoren dat het een sterk formatief karakter heeft. Verder bleek in het project van Roorda et al. (2023) dat het voeren van een 'niet antwoordgericht' klassengesprek ook een lastige vaardigheid kan zijn. Voor het lesgeven volgens deze aanpak zullen docenten zich in veel gevallen verder moeten professionaliseren. Het lijkt waardevol om daarover te leren in een team van docenten, bijvoorbeeld door middel van Lesson Study (Takahashi, 2021, Roorda et al. 2023).

Wat levert dit de leerlingen op?

Onderwijs gaat over het leren van leerlingen. Je kunt je afvragen wat leerlingen nu precies leren van lessen volgens de TTP-aanpak? Het meemaken van de demo-lessen, maar ook eerdere ervaringen met TTP-lessen, maakt duidelijk dat de TTP-aanpak zich richt op een brede wiskundige ontwikkeling, met een gerichtheid op concepten, procedures, strategieën, houding maar ook op hun ontwikkeling als mens in de maatschappij. We denken verder na over vervolgprojecten en ook onderzoek om meer gestructureerd te meten wat de opbrengsten voor leerlingen zijn.

Oplossingen opdracht afbeelding 2



Afbeelding 8. Verschillende aanpakken om het aantal stippen te berekenen.

Literatuur

Roorda, G., De Vries, S., & Smale-Jacobse A.E., (2023). *Teaching Through Problem-solving en Lesson Study*. Hoe ondersteunt TTP-LS wiskundedocenten om aandacht aan probleemoplossingsvaardigheden van leerlingen te besteden? Rijksuniversiteit Groningen.

Takahashi, A. (2021) *Teaching Mathematics through problem-solving. A pedagogical approach from Japan.* Routledge.

Takahashi, A., McDougal, T., Friedkin, S., & Watanabe, T. (2022). *Educators' Learning from Lesson Study: Mathematics for Ages 5–13*. Routledge.

Gerrit Roorda is vakdidacticus wiskunde en lerarenopleider aan zowel de Rijksuniversiteit Groningen als aan de Master Leraar Wiskunde van NHL Stenden Hogeschool. Contact-emailadres; g.roorda@rug.nl.

Paul Durenkamp is vakdidacticus wiskunde en lerarenopleider aan zowel de Rijksuniversiteit Groningen als de bacheloropleiding Leraar wiskunde van NHL Stenden Hogeschool.

Sibren Stienstra is vakdidacticus wiskunde en lerarenopleider aan de bacheloropleiding Leraar wiskunde van NHL Stenden Hogeschool.

Afbeelding 9: Takahashi aan het werk.

DIDACTIEK voor VAK en BEROEP

Uitgave van het lectoraat Didactiek voor Vak en Beroep
van NHL Stenden Hogeschool

najaar 2023

Colofon

Redactie
Siebrich de Vries
Marco Mazereeuw

Beeld
Niek de Jong, Minke Potgiesser,
Timo de Jong en Kris van Houten,
mbo-studenten Media bij Firda
Marieke Kijk in de Vegte (Interview)
Pexels

Vormgeving
Jan Tiemersma

Het gehele magazine
https://www.nhlstenden.com/onderzoek/lectoraat/didactiek-voor-vak-en-beroep