Denkactiverende wiskundelessen

De 12 enveloppenpuzzel

Gerrit Roorda, Sibren Stienstra

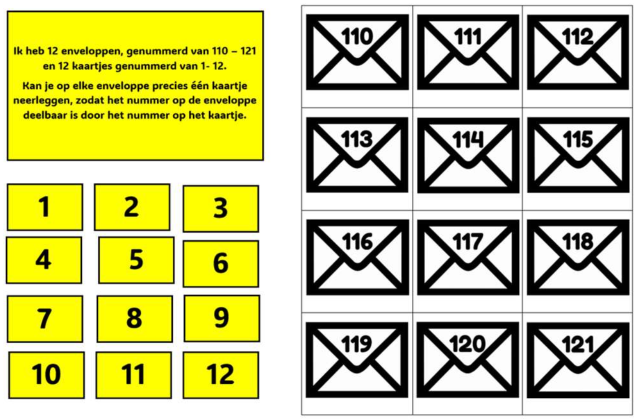
Inleiding

Samen met de wiskundesecties van het Dr. Nassau College in Assen en Het Hogeland College in Warffum hebben we het afgelopen jaar meerdere lessen ontwikkeld en uitgevoerd, gebaseerd op Teaching Through Problemsolving (TTP). De ontwikkeling van de lessen werd ondersteund door begeleiders van de RUG en NHL Stenden. Het geven van de lessen werd zowel door de docenten als de begeleiders gedaan. Ontwikkelde lessen zijn, na dat ze zijn gegeven, in de secties besproken en waar nodig aangepast. De les in dit artikel is in een brugklas havo/vwo uitgevoerd door Sibren, auteur van dit artikel, en geobserveerd door 8 docenten. Reacties op de les waren erg positief, vandaar dat we de les graag beschrijven in het kader van de Euclidesspecial 'mijn mooiste les'. Alle materialen van deze les en andere uitgevoerde lessen zijn (binnenkort) te vinden op de website www.ttpwiskunde.nl

De lesopzet en de opdrachten

Deze les is ontwikkeld voor een brugklas havo/vwo. Het thema van deze les staat los van de hoofdstukken in het boek, zodat de les buiten de reguliere lesstof om gegeven zou kunnen worden. Wel is het thema van de les relevant voor onderwerpen die later in de leerstof terug zullen komen. Hierbij kan gedacht worden aan het vereenvoudigen van breuken en wortels, of het ontbinden in factoren.

Ons plan was om centraal in deze les de zogenaamde 12 enveloppen puzzel (zie Afb.1) te laten maken (https://mathequalslove.net/twelve-envelopes-puzzle/)



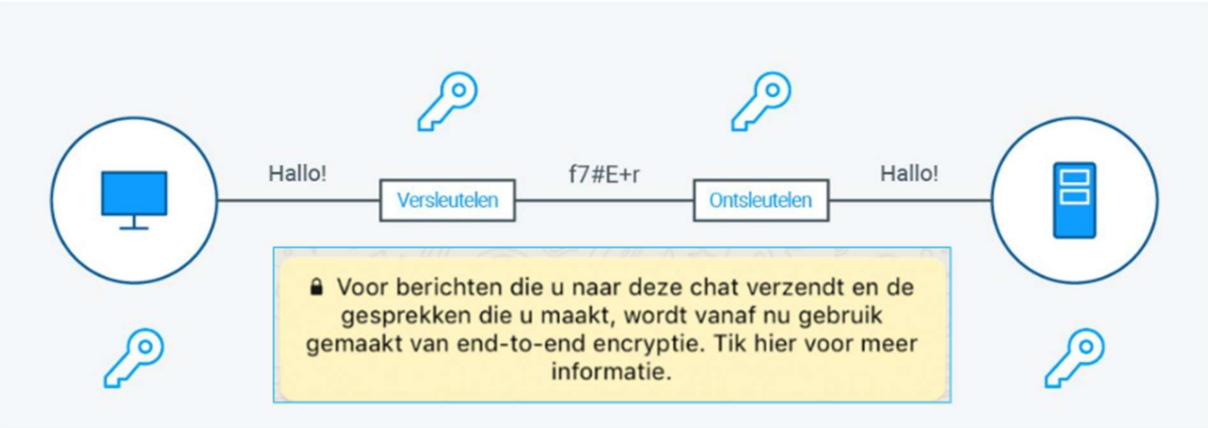
Afb. 1. De 12 enveloppen puzzel.

Omdat we inschatten dat de voorkennis van de leerlingen voor het maken van deze opdracht niet voldoende is, besloten we de les te beginnen met het introduceren van het begrip 'deler' en het begrip 'priemgetal'. Voor het maken van de enveloppen puzzel is namelijk het begrip 'deler' essentieel en het begrip priemgetal mogelijk erg handig. Bij de 12 enveloppen zit 'toevallig' maar één priemgetal, namelijk 113. Dat betekent dat het kaartje met nummer 1 persé op 113 moet komen;

andere kaartjes kun je daar niet kwijt. Priemgetallen en delers kunnen ook op een andere manier helpen bij het maken van de puzzel. Voordat we de ervaringen met de 12 enveloppen puzzel beschrijven, geven we eerst een overzicht over de opzet van de les met enkele ervaringen en observaties.

Introductie les

De les begint met de vraag of leerlingen het gele bericht in afbeelding 2 ergens hebben gezien. Leerlingen kijken geinteresseerd mee en enkele vingers gaan omhoog. Een leerling vertelt: '*Als je een nieuwe Whatsappgroep start*'. Sibren legt uit dat als je een Whatsapp bericht zou 'onderscheppen' je een zin leest die niet te begrijpen is. Je hebt een sleutel nodig om het bericht te ontcijferen. De sleutel heeft te maken met 'priemgetallen'. De leerlingen zijn geinteresseerd en nieuwsgierig. Ergens merkt een leerling op dat ze op de basisschool al over priemgetallen gehoord heeft. Ze blijkt de enige te zijn.



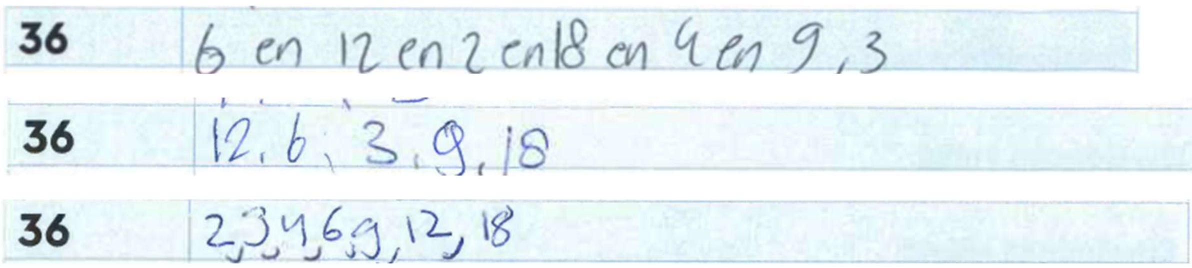
Afb. 2 Boodschap over versleuteling bij whatsapp

Delers en priemgetallen

De les vervolgt met de toelichting op het begrip 'deler' en 'echte deler'. Na de toelichting dat 2 en 3 delers zijn van 6, werken leerlingen kort individueel aan het werkblad (zie afbeelding 3). Mooi te zien is de verschillende strategieën om delers van 36 al dan niet gestructureerd te vinden (zie afbeelding 4). In verband met de tijd kon de docent dit niet uitgebreid bespreken, maar het zou een onderwijsleergesprek waard zijn om te bedenken hoe je gestructureerd kunt werken.

Getal	Echte delers
6	2 en 3
14	7, 2,
36	6, 2, 3, 12, 18, 9, 4
37	

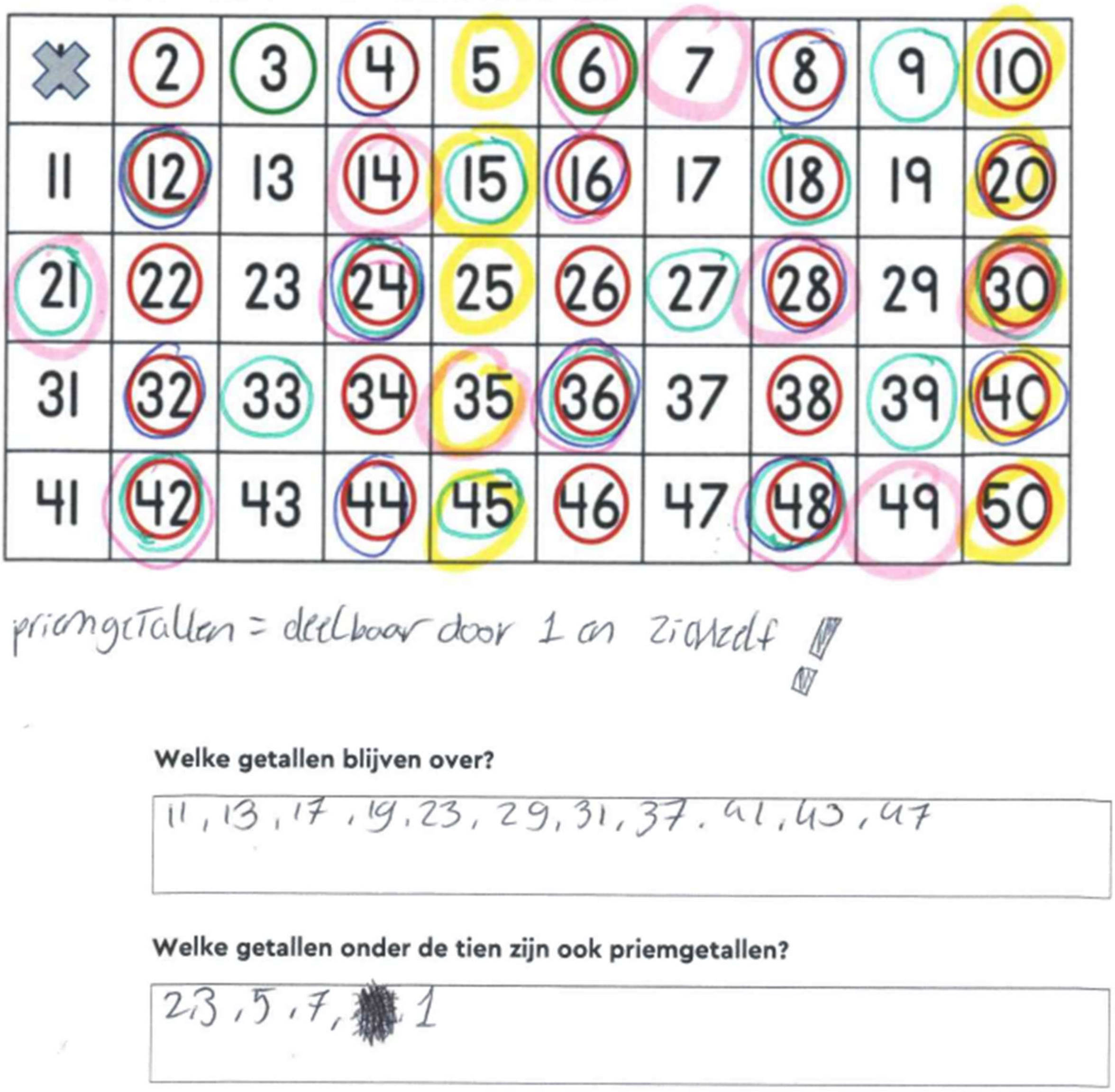
Afbeelding 3. De delers van…



Afbeelding 4. Verschillende antwoorden van de echte delers van 36

De zeef: Priemgetallen en een stukje geschiedenis

De les vervolgt met een introductie van het werkblad waarop leerlingen veelvouden van respectievelijk 2,3,4,5,6 en 7 moeten omcirkelen; kleurpotloden bij de hand (zie Afbeelding 5)



Afbeelding 5. Werkblad van een leerling

Uit de observaties blijkt dat leerlingen dit een leuke opdracht vinden. Er wordt serieus gewerkt aan het in kleur omcirkelen. We merken dat sommige leerlingen het begrip veelvoud niet kennen. In een bijstelling van de les hebben we daar vooraf meer aandacht aan gegeven. Alle leerlingen schrijven de priemgetallen vanaf 11 netjes op. Observatoren horen in de klas op verschillende plaatsen 'Aha'-momentjes' Een observator vertelde in het nagesprek: *je hoorde ze opeens zeggen; oh ja, zit dat* zo'. Maar het gaat moeilijker bij de vraag welke getallen onder de 10 ook priem zijn. Veel leerlingen noteren 3,5,7 maar ook 9. Dat heeft natuurlijk te maken met de rondjes die gezet zijn (zie afbeelding 5). Ook dit passen we aan in een bijgestelde les. Ook over de 1 is verschil van mening. Sibren legt uit dat het een afspraak is dat 1 geen priemgetal is. Een mooi moment is de sheet waarop duidelijk wordt dat het denkwerk wat de klas net gedaan heeft meer dan 2000 jaar geleden ook gedaan werd door Eratosthenes van Cyrene.

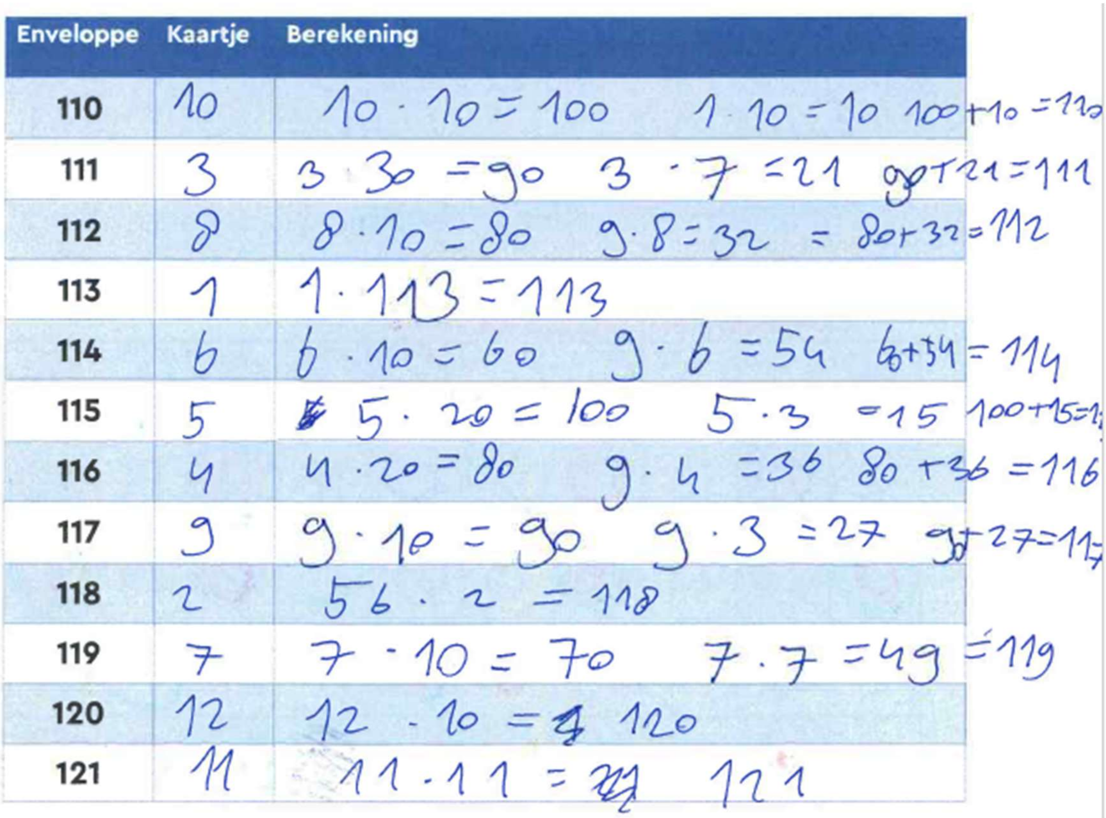
De 12 enveloppen puzzel

We zijn zover dat we aan de 12 enveloppen puzzel kunnen beginnen. Leerlingen krijgen in duo's (Leerling: *meneer wat is een duo),* per tweetal een A4 met enveloppen met daarop de getallen 110 – 121 en 12 gekleurde kaartjes met de nummers 1 – 12. De les is inmiddels al wel 35 minuten bezig. Toch blijkt uit de observaties dat leerlingen direct aan het puzzelen slaan. Veel duo's beginnen snel met de grote getallen 10, 11 en 12. Als de grote getallen liggen, begint het gepuzzel. Een paar leerlingen komen ook snel tot de conclusie dat de 5 op enveloppe 115 moet komen te liggen.

Wat opvalt is dat veel leerlingen niks opschrijven en voornamelijk terug vallen op hoofdrekenwerk. Meerdere observatoren constateren een veel gemaakte fout: 118 is deelbaar door 9 en 116 is deelbaar door 8. De meeste leerlingen proberen zo de gele kaartjes snel op hun plek te krijgen. Enkele duo's hebben de opdracht geheel opgelost, soms wel na enige correcties (zie afbeelding 6). Een enkele leerling schrijft alles netjes op het werkblad (zie afbeelding 7)

Eén van de observerende docenten: Ik observeer een tweetal jongens en vraag (tussendoor) hoe ze te werk gaan: Kaartje 10 moet op de envelop met 110 of 120; Kaartje 12 moet op 120, dus 10 moet op 110 Kaartje 11 moet op 121 Kaartje 3 moet in de rij met 111, 114 en 117 Kaartje 5 moet op 115 Kaartje 8 moet op 116 (*comment observator: dit klopt niet)* Kaartje 4 moet op 112 (*comment observator: dit kan wel, maar is niet handig)* Kaartje 9 moet op 118, want 90+28 is 118; Oh nee, dan moet 9 op 117, want 90+27 is 117 (28 is niet deelbaar door 9). Kaartje 6 moet op 114 want 120 = 20x6, 20x6-6=114 Kaartje 3 moet op 111 Kaartje 7 moet op 119 Kaartje 1 moet op 113 Als ik vraag waarom ze bijvoorbeeld 8 op 116 hebben gelegd, zeggen ze 116 is 80+36. Oh nee, dan moet 8 op 112 en 4 op 116 (want 36 is niet deelbaar door 8).	

Afbeelding 6 Denkproces van een tweetal met uiteindelijke oplossing.



Enveloppe	Kaartje	Berekening
110	10	10 · 10 = 100 1 · 10 = 10 100+10 = 110
111	3	3 · 30 = 90 3 · 7 = 21 90+21 = 111
112	8	8 · 10 = 80 9 · 8 = 32 = 80+32 = 112
113	1	1 · 113 = 113
114	6	6 · 10 = 60 9 · 6 = 54 60+54 = 114
115	5	5 · 20 = 100 5 · 3 = 15 100+15=1
116	4	4 · 20 = 80 9 · 4 = 36 80 + 36 = 116
117	9	9 · 10 = 90 9 · 3 = 27 90+27=117
118	2	56 · 2 = 118
119	7	7 · 10 = 70 7 · 7 = 49 = 119
120	12	12 · 10 = ~~4~~ 120
121	11	11 · 11 = ~~21~~ 121

Afbeelding 7 Uitwerking van een leerling.

De tijd begint te dringen.

In een korte bespreking laat de docent verschillende leerlingen uitleggen waarom 10, 11 en 12 snel weggelegd kunnen worden. Leerlingen kunnen dit goed toelichten. Ook de 5 wordt netjes toegelicht. Maar ja, de tijd dringt. Er is geen ruimte meer om uitgebreid in te gaan op strategieën om de andere kaartjes weg te leggen. Dat is jammer, want het zou mooi zijn om de strategieen te bespreken. Met de boodschap dat het handig is om eerst goed na te denken hoe je aan de puzzel begint, namelijk met de hoge getallen, en niet direct met 1 , 2 en 3, eindigt Sibren dit deel.

Ter afsluiting komt Sibren terug op de versleutelde boodschap. Nog even is er aandacht en interesse, maar dan is het tijd om in te pakken.

Conclusies:

Alle observatoren zijn positief over de werkhouding van de leerlingen. Misschien wel omdat er zoveel observatoren zijn, maar ook de verschillende opdrachten bleken te enthousiasmeren. '*Dit zet aan tot denken'* zegt een docent in het nagesprek. Ook de globale informatie over de toepassing van cryptografie, en een korte opmerking over de geschiedenis van de zeef van Eratosthenes, leidt tot gespitste oren.

Na de uitvoering en evaluatie van de les is er een aantal punten waarop we de les willen verbeteren. De informatie over priemgetallen leidt niet tot expliciet gebruik van deze kennis in de enveloppen puzzel. Zo is er bijvoorbeeld geen enkele leerling die 113 als priemgetal herkent. We denken dat we langer stil moeten staan bij het thema 'delers' (zie afbeelding 3) en hier mogelijk ook de koppeling met de priemfactorisatie moeten maken. Als laatste zou ook het begrip veelvoud aan bod moeten komen.

Ook was er in deze les te weinig tijd om over strategieen van de enveloppen puzzel te spreken, terwijl dat in een TTP-les juist wel als belangrijk gezien wordt. Aanpakken zoals: als je één drievoud hebt, dan heb je andere drievouden ook snel (steeds 3 verder). Mogelijk kunnen we aangeven dat er precies één priemgetal is: als je die vindt, weet je waar de 1 moet. Ook zouden er leerlingen misschien op het idee kunnen komen van priemfactorisatie, zeker als we daar in het begin van de les ook al naar toe werken. Ook zou er aandacht kunnen zijn voor de handigheidjes om te checken of een getal deelbaar is door 3 of 4, maar ook dat zal tijd kosten. Duidelijk is dat het teveel wordt voor één les: We hebben de les daarop aangepast en opgesplitst in twee delen (zie www.ttpwiskunde.nl). We denken dat het beter gaat werken, maar horen graag ervaringen als docenten het hebben uitgeprobeerd.

Ten slotte: het samen observeren en nabespreken van een les, in een Lesson Study- achtige setting, werd als inspirerend ervaren. Het observeren van het leren van leerlingen blijkt altijd weer bijzonder. Docenten zijn positief over het met elkaar in gesprek zijn over hoe de opzet van de les bijdraagt aan het leren. Op deze manier is de wiskundesectie concreet en actief bezig om samen te leren over het geven van goed wiskunde-onderwijs.

Gerrit Roorda is vakdidacticus wiskunde en lerarenopleider aan zowel de Rijksuniversiteit Groningen als aan de Master Leraar Wiskunde van NHL Stenden Hogeschool. Contact-emailadres; g.roorda@rug.nl.

Sibren Stienstra is vakdidacticus wiskunde en lerarenopleider aan de Bachelor en de Master Leraar wiskunde van NHL Stenden Hogeschool.

Met dank aan de wiskundesecties van het Dr. Nassau College in Assen en Het Hogeland College in Warffum