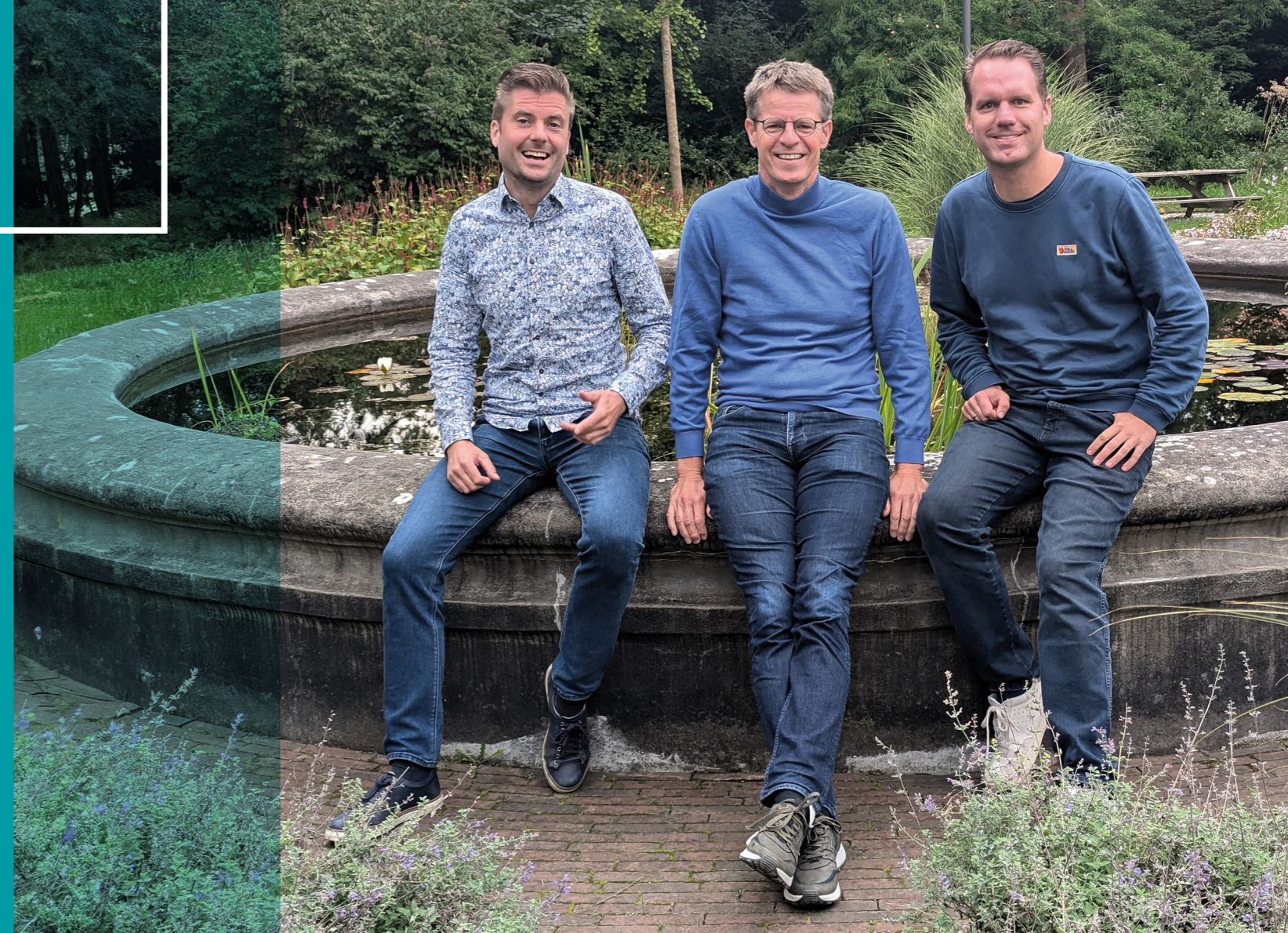


Klassengesprekken in TTP-wiskundelessen

In wiskundelessen gebaseerd op Teaching through problem solving werken leerlingen eerst zelf samen aan een wiskundig probleem om vervolgens onder leiding van de docent hun aanpak met elkaar uit te wisselen. Centraal in TTP-lessen staat het klassengesprek. We merken dat het voeren van zo'n klassengesprek in een TTP-les mooi is, maar ook complex. In dit artikel gaan we in op ervaringen met het klassengesprek, proberen we de complexiteit te doorgronden en manieren aan te dragen om het voeren van een klassengesprek verder te ontwikkelen.



Inleiding

Een wiskundeles start met de volgende opdracht: Hoeveel is 22,5% van 800? De leerlingen werken hier enige tijd aan. In schriften verschijnen verschillende uitwerkingen, zie Tabel 1.

Stel, je wilt in een klassengesprek de opdracht bespreken. Hoe kun je omgaan met zoveel verschillende antwoorden? Welke leerling geef je de beurt? Welk wiskundig doel wil je eigenlijk bereiken? Wat doe je met de verkeerde antwoorden? Kortom: Hoe voer je een klassengesprek over de ideeën van leerlingen?

Afgelopen jaar hebben de wiskundesecties van het Dr. Nassau College in Assen en het Hogeland College in Warffum zich met deze vragen beziggehouden onder begeleiding van ons, lerarenopleiders van RUG en NHL Stenden Hogeschool. Het project was gericht op het ontwikkelen en uitvoeren van TTP-wiskundelessen. Centraal in TTP-lessen staat het klassengesprek. Takahashi (2021), expert op het gebied van TTP, noemt het klassengesprek het 'hart van TTP'. Het Japanse woord voor deze fase is *Neriage* wat kneden of polijsten betekent.

Tabel 1: Verschillende uitwerkingen van leerlingen om 22,5% van 800 te berekenen, met toelichting van de auteurs

Leerling	Berekening	Toelichting auteurs
1	$10\% = 80; 2,5\% = 20$ dus $22,5\% = 80 + 80 + 20 = 180$	22,5% splitsen in $10\% + 10\% + 2,5\%$.
2	$800 : 100 \times 22,5 = 180$	Eerst 1% ($800 : 100$) en dat keer 22,5%
3	$0,225 \times 800 = 180$ (met rekenmachine)	22,5% is 0,225 deel
4	$22,5 \times 800 = 18000$	Onjuist want 22,5% is $22,5/100$ ste deel.
5	$800 - 22,5\% = 800 - 180 = 620$	Onjuist; mogelijk gedacht 'Van' is 'ervan af'?
6	$0,225 \times 800 = 162$ (met rekenmachine)	Onjuist: Reken- of begripsfout? (0,2025 ipv 0,225)

In de Nederlandse context bestudeerde Chris Kooloos klassengesprekken in wiskundelessen. Hij definieert een klassengesprek als:

leerlingen krijgen een wiskundig probleem om over na te denken, en daarna volgt een klassikale uitwisseling van de verschillende ideeën die leerlingen hebben, waarbij leerlingen hun eigen denken expliciteren en elkaars denken proberen te volgen en te bediscussiëren (Kooloos, 2022, p.185)

Deze definitie past vrijwel geheel bij de *Neriage*-fase van een TTP-les, maar wat aangevuld zou moeten worden is de rol van de docent. Bij TTP speelt de docent een sturende rol om leerlingen de essentie van de wiskunde in het probleem te laten ontdekken. Een conclusie van Kooloos is dat een klassenge-

sprek complex is, maar ook dat docenten in korte tijd significante stappen kunnen zetten in het voeren van klassengesprekken.

In dit artikel beginnen we met enkele voorbeelden van klassengesprekken uit 'gewone' wiskundelessen, vervolgens delen we ervaringen met klassengesprekken uit het TTP-project, beschrijven centrale thema's rond TTP-klassengesprekken en sluiten af met suggesties hoe je hierin verder kunt ontwikkelen.

Het klassengesprek in 'gewone' wiskundelessen

In veel wiskundelessen zien we, als lerarenopleiders, vraag-antwoord-patronen waarin de docent een vraag stelt en vervolgens het goede antwoord wil horen (zie voorbeeld 1). In de literatuur worden dergelijke patronen aangeduid met Initiation-Reponse-Evaluation

(IRE) patronen: het antwoord van de leerlingen wordt door de docent geëvalueerd, soms in woorden, maar soms ook door een klein moment van non-verbale communicatie. Schoenfeld (2002) beschrijft deze IRE-patronen en noemt dat ze veel voorkomen in wiskundelessen.

Docenten gebruiken vaak de volgende 'evaluatie'-reacties: (1) schakelen naar uitleg, (2) schakelen naar het gesloten maken van de vraag, (3) herformuleren van het antwoord, (4) vragen naar een ander antwoord, of (5) het antwoord 'parkeren' (zie Kooloos, 2022). In voorbeeld 2 wordt dit toegelicht: de docent wil graag toewerken naar een standaardformule waarmee je de top van een parabool kunt vinden. Gevolg van dit IRE-vraagpatroon kan zijn dat impliciet gecommuniceerd wordt dat een antwoord 'wordt beloond' als het aansluit bij wat de leraar graag wil horen.

Het klassengesprek in TTP-lessen

In tegenstelling hiermee is het klassengesprek in TTP-lessen gericht op het bespreken van de aanpakken van leerlingen, om daarin de essentiële aspecten van de wiskundige procedures en concepten naar voren te brengen. Dit zagen we in de lessen van Takahashi (zie Roorda, Stienstra & Durenkamp, 2023). Zijn hoofdgedachte is dat de leraar de leerlingen begeleidt om tot een gemeenschappelijk begrip te komen. Het gaat niet om het vinden van het antwoord, maar om het begrijpen van aanpakken van verschillende leerlingen en het leren van de wiskunde die achter het probleem zit. Fouten of misconcepties kunnen uitgebreid besproken worden, als het wiskundige begrip van leerlingen erdoor kan worden versterkt. Niet elke aanpak wordt besproken; de docent bepaalt namelijk welke aanpakken van belang zijn met het oog op de te ontwikkelen wiskundige kennis. Dat kan weergegeven worden in een *Neriage-map* (zie voorbeelden Takahashi, 2021) een soort gespreksplan waarin mogelijke uitwerkingen, essentiële vragen en de centrale boodschap staan.

Takahashi wil voorkomen dat de leerlingen naar hem kijken als de autoriteit. Hij gebruikt

in zijn reacties geen waardeoordelen zoals dat een idee van een leerling goed, fout, slim of onhandig is. Hij laat leerlingen vaak aanpakken uitleggen die ze niet zelf hebben gebruikt. De leerlingen die ingeschakeld worden, zijn gekozen op basis van het monitoren van leerlingen tijdens de fase waarin leerlingen aan het probleem werken. Maar hoe kunnen we dit toepassen in onze Nederlandse TTP-wiskundelessen?

De ontwikkelde en uitgevoerde TTP-lessen

De TTP-lessen in ons project zijn ontwikkeld door docenten samen met lerarenopleiders. In de lesvoorbereiding stonden we stil bij de keuze voor een goed startprobleem, de wiskunde die centraal staat, en de antwoorden die we verwachten. Ook hoofdlijnen van het klassengesprek werden besproken, maar deze werden vaak niet verder uitgewerkt, omdat het gevoel was dat je van tevoren niet goed kunt bepalen hoe het gesprek gaat lopen. De lesgevende docent kreeg zodoende veel ruimte om in het klassengesprek naar eigen intuïtie te handelen. Dit is een essentieel verschil met de *Neriage-map*, het gespreksplan, waarin de ruimte wordt ingeperkt doordat de essenties vooraf worden vastgelegd.

Bij de uitvoering van de lessen merkten we dat het lastig was om het klassengesprek zo vorm te geven als we zouden willen. Het lukte meestal wel enkele leerlingen hun aanpak te laten verwoorden, maar het op elkaar laten reageren lukte nog niet goed. Momenten die zich ervoor leenden om een antwoord door te spelen, of door andere leerlingen te laten toelichten, werden soms omgezet naar uitleg van de docent. Dit werd sterker als er tijdsdruk werd gevoeld om de inhoud van de les af te ronden. Ook dit is anders dan we bij Takahashi zagen, omdat het hem er niet om gaat 'zijn les af te ronden', maar leerlingen de wiskundige essentie te laten begrijpen.

Ook werd soms overgestapt van het gemeenschappelijk begrijpen naar het individueel begeleiden. In voorbeeld 3 staat een

Voorbeeld 1: Het goede antwoord

Docent: *Is dit een scherpe of een stompe hoek?*
 Leerling: *Scherp.*
 Docent wacht even....
 Leerling zegt: *Oh nee. Stomp.*
 Docent: *Goed zo, een stompe hoek.*

Voorbeeld 2: Verschillende IRE-patronen in een kort klassengesprek

Op het bord staat $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$. Bereken de top.
 Docent: *Wat zou de eerste stap in de berekening zijn?*
 Leerling: *Alles delen door 2.*
 Docent: *Nee dat mag niet zomaar, dan krijg je een andere functie. Iemand een ander idee? [(1) schakelen naar uitleg, (4) ander antwoord vragen]*
 Andere leerling: *Min b gedeeld door a.*
 Docent: *Bijna. [(5): parkeren]*
 Weer andere leerling: *Het is gedeeld door 2a.*
 Docent: *Ok, min b gedeeld door 2a (schrijft op $X_{top} = \frac{-b}{2a}$) [(3) herformuleren]*

Voorbeeld 3: één op één begeleiding

Docent: Wie weet nog andere delers van 12?
 Leerling: 3, 4, 6
 Docent: Wie weet getallen die géén deler zijn van 12. Anne weet jij het?
 Ergens in de klas zegt een leerling: 'zeven'
 Anne: 7.
 Docent: Waarom is 7 geen deler van 12?
 Anne: Weet ik niet.
 Docent: Hoeveel is $12 : 7$?
 Anne: ... weet ik niet.
 Docent: Wat is 1×7 ?
 Anne: 7.
 Docent: Wat is 2×7 ?
 Anne: 14...oh, dat is meer dan 12.

vraag-antwoord-patroon waarin de docent een één-op-één-gesprek met leerling Anne voert. Door het makkelijker maken van de vraag ondersteunde de docent Anne om tot een antwoord te komen.

Achteraf reflecteerde de docent dat hij de klas had kunnen inschakelen, omdat dit juist het gezamenlijke begrijpen versterkt. De docent zei hierover: *Pas als de klas niet verder komt, had ik de ondersteuning moeten bieden.* De klas had ingeschakeld kunnen worden door na het 'weet ik niet' van Anne bijvoorbeeld de vraag kunnen stellen: Wie heeft ideeën over of 7 een deler van twaalf is of niet? Het gesprek was dan nog niet klaar geweest, want de docent zou weer moeten checken of Anne de uitleg van een klasgenoot heeft begrepen.

Er waren ook allerlei momenten waar het wel lukte leerlingen op elkaar te laten reageren. Docenten speelden soms reacties door naar andere leerlingen, of vroegen leerlingen het idee van een andere leerling toe te lichten. Bijvoorbeeld tijdens een les waarin de

opdracht in figuur 1 centraal stond (zie lesmateriaal www.ttpwiskunde.nl). Een leerling dacht dat 12,5% van de figuur was gekleurd, terwijl een andere leerling 8% had berekend. Een klein deel van het klassengesprek staat in voorbeeld 4.

Reflectie op de uitgevoerde klassengesprekken

Bovenstaande voorbeelden laten zien dat het soms lukt om delen van het klassengesprek volgens plan te voeren, maar ook dat deze gesprekken complex zijn. In deze paragraaf bespreken twee thema's met betrekking tot het klassengesprek.

Bij een klassengesprek in een TTP-les zal er een cultuur moeten zijn van naar elkaar luisteren en elkaar proberen te begrijpen. De invloed van de klassencultuur, ook wel genoemd de sociale normen in de klas, wordt beschreven door Gravemeijer (z.d.). Hij beschrijft dat in een klas sociale normen impliciet aanwezig zijn die 'beschrijven' hoe leerling en docenten met

Voorbeeld 4: 12,5% of 8%?

Leerling 1: Er is 12,5% gekleurd.
 Docent: Hoe kom je op het idee?
 Leerling 1: 4 van de 50 is 2 van de 25 is 1 van de 12,5 dus 12,5%.
 Docent: Ok, zijn we het daarover eens?
 Leerling 2: Ik denk dat het 8% is.
 Docent: Dat is wat anders?
 Leerling: Volgens mij betekent 4 van de 50 dat er in verhouding 8 vakjes van de 100 vakjes zijn, en dat is dus 8%.
 Docent: Wat denk jij leerling 1?
 Leerling 1: O ja, er zouden 12,5 vakjes van de 100 rood moeten zijn, dan is het 12,5%.
 (Verbetert het antwoord in zijn aantekening, zie afbeelding 1.)

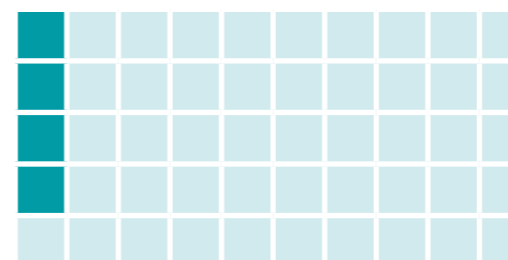
elkaar omgaan. Bijvoorbeeld, leerlingen weten feilloos op basis van de (non-verbale) reactie van de docent of hun antwoord goed of fout is; of ze weten dat als ze niet antwoorden, de docent iemand anders vraagt of zelf het antwoord geeft.

Het klassengesprek in een TTP-les zal voor de meeste docenten en klassen een verandering zijn van bestaande sociale normen. Van leerlingen wordt verwacht dat ze ideeën

beredeneren, dat ze elkaars idee proberen te begrijpen, dat ze aangeven of ze het eens of oneens zijn met een oplossing.

Voor docenten zal de aandacht verschuiven van 'uitleggen' naar het begeleiden van het leren van wiskunde. Dit is goed zichtbaar in de vaak uitgebreide fase van het bespreken van het startprobleem, waar de docent lang stil staat bij één opdracht om tot een gemeenschappelijk begrip te komen, maar ook in

Figuur 1: Opdracht, met berekening van een leerling.



a. Welk deel is donker gekleurd?

$$\frac{4}{50} = \frac{8}{100}$$

4 van de 50

b. Kun je de antwoorden op de vraag...

$$12,5\%$$

$$8\%$$

de fase waarin leerlingen zelfstandig aan het probleem werken, omdat de docent de leerlingen monitort maar niet helpt.

Een mooi voorbeeld van een ontwikkeling was dat één van de docenten vertelde dat ze in haar lessen steeds meer benadrukt dat ze wil weten wat leerlingen denken en daarbij steeds benoemt 'het maakt niet uit of het goed of fout is'. Deze docent maakt meer en meer duidelijk dat de klas juist veel kan leren van elkaars fouten.

We merken in gesprekken met docenten dat achterliggende opvattingen over wiskunde een rol spelen. Schoenfeld (1992) beargumenteert dat opvattingen over wiskunde zich bewegen tussen twee uitersten: de opvatting dat wiskunde een geheel is van feiten en procedures en 'wiskunde leren' het onder de knie krijgen van deze feiten en procedures en de opvatting dat wiskunde de 'wetenschap van patronen' is met een nadruk op het zoeken van patronen. Het schoolcurriculum lijkt vaak sterk te leunen op de eerste opvatting. TTP-lessen zijn echter gebaseerd op de tweede opvatting. In het TTP-project is de vraag of we voldoende expliciet aandacht hebben voor de opvattingen van de docenten over wiskunde.

Het structureel wijzigen van de cultuur in een klas is ingrijpend. Om TTP-lessen echt tot hun recht te laten komen, zal het nodig zijn om deze klassencultuur te veranderen, door het te expliciteren, te modelleren en door vasthoudend te zijn (zie ook Gravemeijer, z.d.).

We merken dat het geven van een TTP-les vaardigheid vereist die docenten (inclusief zichzelf) verder kunnen ontwikkelen. De verschuiving van een docent die uitlegt, voordoet, demonstreert, naar een docent die vraagt, reacties doorspeelt en aanpakken en strategieën laat expliciteren. Als docent helpt het als je goed weet wat de essentie is van de wiskunde die in de les centraal staat. Ook draagt het bij als je veel inzicht hebben in mogelijke denkwijzen van leerlingen.

Kooloos (2022) beschrijft de ontwikkeling van twee docenten die deelnemen aan een docent-ontwikkel-team. Uit de gedetailleerde beschrijving van de twee casussen blijkt dat het mogelijk is in korte tijd ontwikkeling te

realiseren op de vaardigheid van het voeren van een klassengesprek (Kooloos, 2022). Een voorwaarde voor de ontwikkeling lijkt te zijn dat de deelnemende docenten zichzelf willen ontwikkelen op het specifieke punt van klassengesprekken.

In het TTP-project is beperkte en vaak impliciete aandacht geweest voor deze vaardigheden. We denken dat het helpt om te oefenen met ontwikkelde lessen, waar veel ervaring mee is opgedaan, zoals bijvoorbeeld de les *Lucifers-(woord)formules* (zie www.ttpwiskunde.nl).

Stappen maken in het klassengesprek

Hoe kun je als docent stappen maken in het klassengesprek? We noemen hier een aantal ontwikkelmogelijkheden.

Het samenwerken als sectie, of groep wiskundedocenten, kan het ontwikkelen van de TTP-didactiek versterken. Een eerste stap zal zijn om samen na te gaan welke opvattingen over wiskunde en wiskundeonderwijs teamleden hebben. Schoenfeld (1992) benoemt dat het goed is over dergelijke opvattingen te praten en die expliciet te maken.

Vervolgens bereid je samen de les voor, de wiskunde en de opdracht die centraal staan in de les en hoe je een klassengesprek zou willen aanpakken. Als het mogelijk is worden leerlingen tijdens de les geobserveerd, zodat achteraf besproken kan worden hoe de les en het klassengesprek het leren van leerlingen heeft ondersteund. Begeleiding kan hierbij helpen. Een mogelijkheid is ook in de vorm van een Lesson Study (Roorda et al., 2024). Voorwaarde is dat er een wil is om er ook samen over te leren (zie Kooloos, 2022).

Een belangrijk aspect van het klassengesprek is het voorbereid zijn op mogelijke antwoorden van leerlingen (zie Kooloos, 2022). Bedenk wat de veel voorkomende aanpakken van leerlingen zijn, welke misconcepties kunnen optreden en welke mogelijke antwoorden je wilt bespreken en hoe je dat zou willen doen. Zo is bij de opdracht in figuur 1 te verwachten dat er leerlingen rekenen met optellingen (leerling 1) en

andere leerlingen met vermenigvuldigen (leerling 2 en 3).

Mogelijk is het voor deze klas juist van belang om de overgang van het optellen naar het efficiëntere vermenigvuldigen te maken, dus dan zijn aanpakken van leerling 1, 2 en 3 relevant om te bespreken.

In het boek van Takahashi (2021), maar ook op de website ttpwiskunde.nl komen steeds meer lessen beschikbaar die al eens zijn uitgevoerd. Je kunt een les uitkiezen waarvan ook leerlingreacties beschreven zijn. Je kunt zo'n les uitproberen en oefenen. Neem je voor om bij essentiële aspecten van de les niet zelf de uitleg over te nemen, maar leerlingen op elkaar te laten reageren, bijvoorbeeld met vragen als *Kun je vertellen hoe leerling A op dit antwoord komt, of, kun je in je eigen woorden vertellen wat leerling A bedoelt?*, Neem jezelf voor om geen waardeoordeel te geven tijdens het gesprek en bijvoorbeeld dat je eerst minstens drie leerlingen op elkaar te laat reageren.

Afsluiting

We denken dat het sterk is om TTP-lessen te implementeren in afwisseling met directe instructie. In directe instructie-lessen kan de docent wiskundige concepten en procedures uitleggen en laten oefenen. In TTP-lessen moeten leerlingen eerst zelf nadenken over een probleem, over welke concepten en procedures gebruikt kunnen worden, en met elkaar en de docent in gesprek zijn over hun aanpak. Een vraag is wel hoe de afwisseling tussen directe instructie en TTP vormgegeven moet worden. Dat is een interessant onderwerp voor een vervolgproject.

Het was mooi om in het project samen met docenten TTP-wiskundelessen te ontwikkelen. In het begin van het project lag hierbij de focus sterk op het zoeken van geschikte wiskundige problemen, maar we kregen langzamerhand door dat het klassengesprek minstens zo belangrijk is en tevens complex om goed voor te bereiden en uit te voeren. We hebben hierin stappen gemaakt, waar dit artikel een resultaat van is, maar het leerproces is nog volop gaande.

Literatuur

- Gravemeijer, (z.d.). Cobb en Yackel, een analysekader voor reken-wiskundeonderwijs. Gedownload van <https://www.rekenen-wiskunde21.nl/cobb-en-yackel-een-analysekader-voor-reken-wiskundeonderwijs/>
- Kooloos, C. (2022). *Eye on variety: The teacher's work in developing mathematical whole-class discussions*. Doctoral dissertation, Radboud University.
- Roorda, G., Stienstra, S. & Durenkamp, P. (2023). In S. de Vries & M. Mazereeuw (Eds.), *Didactiek voor Vak en Beroep – najaar 2023* (pp. 18 – 27), NHL Stenden Hogeschool.
- Roorda, G., de Vries, S., & Smale-Jacobse, A. E. (2024). Using lesson study to help mathematics teachers enhance students' problem-solving skills with teaching through problem solving. *Frontiers in Education*, 9, Article 1331674. <https://doi.org/10.3389/educ.2024.1331674>
- Schoenfeld, A. H. (2002). A highly interactive discourse structure. *Advances in research on teaching*, 9, 131–170.
- Takahashi, A. (2021). *Teaching Mathematics Through Problem-Solving. A pedagogical approach from Japan*. Routledge.

Gerrit Roorda is vakdidacticus wiskunde en lerarenopleider aan zowel de Rijksuniversiteit Groningen als aan de Master Leraar Wiskunde van NHL Stenden Hogeschool. g.roorda@rug.nl

Paul Durenkamp is vakdidacticus wiskunde en lerarenopleider aan zowel de Rijksuniversiteit Groningen als de bacheloropleiding Leraar wiskunde van NHL Stenden Hogeschool.

Sibren Stienstra is vakdidacticus wiskunde en lerarenopleider aan de bacheloropleiding Leraar wiskunde van NHL Stenden Hogeschool.

DIDACTIEK voor VAK en BEROEP

Uitgave van het lectoraat Didactiek voor Vak en Beroep
van NHL Stenden Hogeschool

najaar 2024

Colofon

Redactie

Siebrich de Vries
Marco Mazereeuw

Beeld

Friso Bruins

Vormgeving

Jan Tiemersma

Het gehele magazine

<https://www.nhlstenden.com/onderzoek/lectoraat/didactiek-voor-vak-en-beroep>



CC BY-ND 4.0
NHL Stenden Hogeschool