Scheve vierkanten, Pythagoras en het leren van docenten

Samen met een team van wiskundedocenten van Winkler Prins in Veendam ontwikkelden we in een Lesson Study-cyclus een les over de stelling van Pythagoras. De les werd opgebouwd volgens principes van Teaching Through Problem solving. Doel van het team was te leren over een werkwijze om probleemoplossingsvaardigheden en betrokkenheid van leerlingen te versterken. In dit artikel beschrijven we de opzet van de les, de ervaringen in de klas, en wat het de deelnemende docenten heeft opgeleverd.

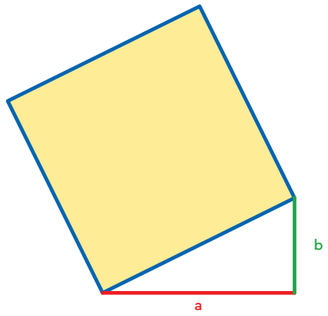


Inleiding

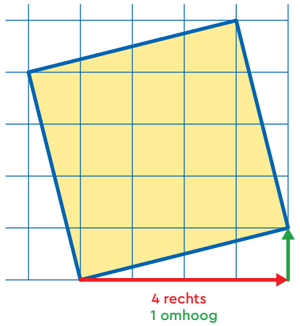
Sinds mijn bezoek aan Japan in 2015 ben ik enthousiast over het thema Teaching Through Problem Solving (TTP). In een TTP-les presenteert de docent aan het begin van de les een wiskundig probleem; leerlingen gaan zelfstandig op zoek naar oplossingsstrategieën, die vervolgens centraal staan in een klassengesprek (zie Takahashi, 2021). Aan de basis van TTP-lessen ligt een opvatting over wiskundeonderwijs die gericht is op het eerst zelf onderzoeken, waarna onder leiding van de docent de ideeën van leerlingen verbonden worden aan wiskundige aanpakken; Swan (2011) noemt dit de *connectionist orientation*. Swan plaatst deze naast de *transmission orientation*, meer gericht op kennisoverdracht door de docent, en de *discovery orientation*, waarbij zelf ontdekken centraal staat met een kleinere rol van de docent. Het gaat in een TTP-les dus niet om 'de uitleg' of om 'zelf ontdekken', maar de docent gebruikt zijn expertise in de keuze voor een passend probleem en het voeren van een klassengesprek om de wiskundige essentie van het probleem zichtbaar te maken. In een TTP-les is aandacht voor de ideeën van de leerlingen, en komen aspecten naar voren zoals probleemoplossen, metacognitie en houding.

Vier wiskundedocenten van het Winkler Prins in Veendam namen deel aan een project om samen een TTP-les te ontwikkelen en te evalueren over de stelling van Pythagoras. De les werd ontwikkeld in een Lesson Study (LS)-cyclus. In drie bijeenkomsten van 90 minuten werd de les voorbereid. De les werd, afwijkend van de gebruikelijke LS-cyclus, op één dag drie keer gegeven aan verschillende havo 2-groepen. In elke les waren twee of drie observatoren aanwezig. In één nabesprekingsbijeenkomst werd teruggeblikt op de ervaringen in de lessen.

Het hoofddoel van het project was om gezamenlijk te leren hoe we leerlingen kunnen stimuleren om actief problemen op te lossen. Daarnaast wilden we de betrokkenheid en motivatie van leerlingen vergroten. De volgende vragen stonden centraal: Kunnen leerlingen op deze manier zelf de stelling van Pythagoras ontdekken? Lukt het om leerlingen actief aan wiskundige problemen te laten werken? En: wat leren docenten van het gezamenlijk ontwerpen, uitvoeren en nabespreken van een TTP-les?



Figuur 1. Scheef vierkant op een rechthoekige driehoek met zijden met lengte a en b



Figuur 2. Het 4-rechts-1-omhoog vierkant

De stelling van Pythagoras ontdekken

Het onderwerp 'De Stelling van Pythagoras' in havo 2 leende zich volgens het team goed voor een TTP-les. We veronderstelden als voorkennis onderwerpen uit voorgaande hoofdstukken, zoals kwadraten, wortels en de oppervlakteberekening van driehoeken en vierhoeken. Het idee voor de les was geïnspireerd op materialen van websites van NRich en Mathshell.org' over het vinden van 'oppervlaktes van scheve vierkanten'. Materialen op deze websites zijn gericht op verrijkende wiskundelessen, waarin specifiek aandacht is voor het opbouwen van conceptuele kennis en probleemoplossingsvaardigheden. De vraag die centraal staat in de les is: Kunnen leerlingen een regel vinden waarmee ze de oppervlakte van een scheef vierkant kunnen bepalen (zie Figuur 1)? Als je kunt aantonen dat de oppervlakte van het vierkant in Figuur 1 gelijk is aan $a^2 + b^2$, heb je de stelling van Pythagoras ontdekt. In de les kozen we ervoor om het ontdekken van deze regel op te bouwen in fases.

De fases in de les

De les[2] is opgebouwd in de volgende fases:

Fase 1 In een korte interactie wordt klassikaal voorkennis geactiveerd met de vraag wat de oppervlakte van een aantal 'rechte vierkanten' is met zijden van 1, 2, 3, en 7 cm.

Fase 2 De docent introduceert het begrip scheve vierkanten. Het aantal stappen naar rechts en omhoog bepaalt de scheefheid.

Fase 3 De docent introduceert het centrale probleem: *Onderzoek wat de oppervlakte is van het scheve vierkant in Figuur 2*. De leerlingen krijgen een werkblad met dit vierkant en gaan eerst individueel en later in tweetallen aan de slag. De leerlingen kunnen op verschillende manieren ontdekken dat deze oppervlakte 17 cm^2 is. Na ongeveer 8 minuten worden de mogelijkheden om de oppervlakte van het 4-naar-recht-1-omhoog-vierkant te vinden besproken.

Fase 4 De leerlingen krijgen nu een tweede werkblad met andere scheve vierkanten die *1-omhoog* gaan (Figuur 3). Het werk in de klas wordt verdeeld, in elke rij onderzoeken tweetallen de oppervlakte van één van de vierkanten. Ook wordt gevraagd wat de oppervlakte van het 6-naar-rechts-1-omhoog vierkant is. Hierna volgt de bespreking waarin alle oppervlaktes worden geïnventariseerd; klassikaal wordt besproken of er een regel te ontdekken is. Omdat de oppervlakte steeds één meer is dan 'het aantal naar rechts in het kwadraat', verwachten we dat leerlingen zullen denken dat de regel is: *oppervlakte vierkant = (aantal naar rechts)² + 1*.

Fase 5 De leerlingen onderzoeken nu vierkanten die steeds *2-omhoog* gaan. Ze mogen niet de gevonden regel gebruiken, maar naderhand controleren of de regel ook in deze situatie klopt. Klassikaal worden oplossingen besproken en samengevat in een tabel. Leerlingen krijgen nu de vraag of de gevonden regel klopt, en vervolgens de vraag of er een betere regel te vinden is.

Fase 6 Ter afsluiting bespreekt de docent de regel dat de oppervlakte van het scheve vierkant bij a naar rechts en b omhoog, overeenkomt met $a^2 + b^2$.

Het plan was dat we in 45 minuten fase 1 – 4 zouden doorlopen en mogelijk fase 5 en 6. In de volgende les wordt de verbinding gelegd met de Stelling van Pythagoras, want als je de oppervlakte van het scheve vierkant weet kan je ook de zijde berekenen.

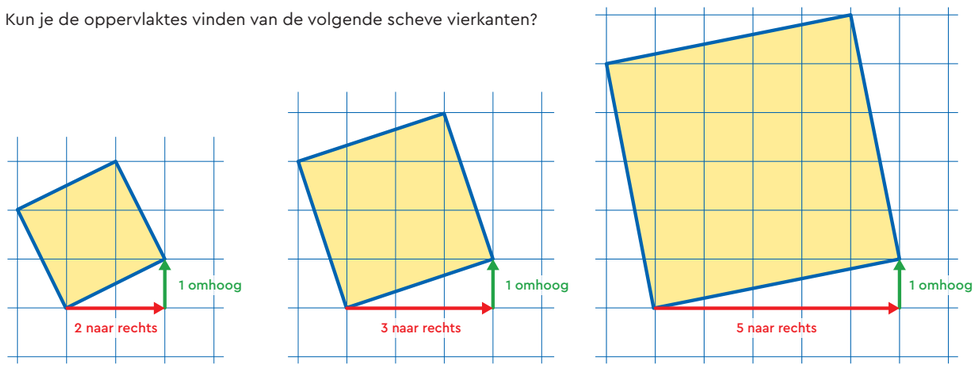
Ervaringen uit de klas

De les werd uitgevoerd in drie verschillende havo 2 klassen. We bespreken hieronder enkele ervaringen.

Fase 1 en 2 verliepen soepel. In fase 3 gebruikten leerlingen allerlei manieren om de oppervlakte van het 4-naar-recht-1-omhoog-vierkant te vinden. We waren verrast door het grote aantal leerlingen dat als antwoord

Werkblad 2

Kun je de oppervlaktes vinden van de volgende scheve vierkanten?



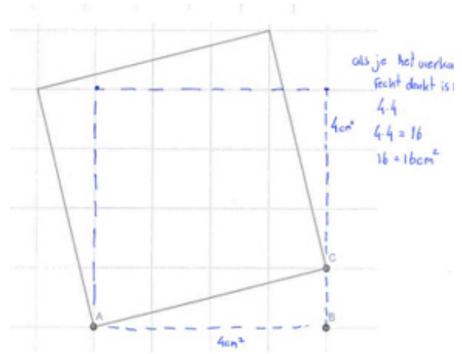
Hoe zit het bij **6 naar rechts – 1 omhoog**?

Figuur 3. De scheve vierkanten op werkblad 2

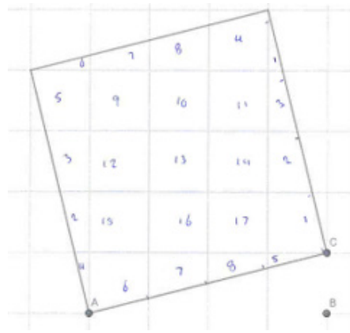
16 cm² vindt door het vierkant 'recht te zetten' (zie Figuur 4) of aan te nemen dat wanneer je 4 naar rechts gaat en 1 omhoog dat de zijde dan 4 × 1 = 4 cm is . Deze leerlingen kregen een kleine hint om dit goed te checken. Vervolgens gebruikten leerlingen veel telstrategieën, met nummertjes of kruisjes, waarbij delen van hokjes gecombineerd werden (Figuur 5). Enkele kleurden gebieden en combineerden dat met telstrategieën (Figuren 6 en 7).

We hadden verwacht dat leerlingen meer gebruik zouden maken van het berekenen van oppervlaktes, zoals met *inlijsten* (zie Figuur 8), omdat dit in een vorig hoofdstuk behandeld was, maar dit gebeurde incidenteel. Daarnaast hoopten we dat leerlingen ook een opdeling zouden vinden zoals in Figuur 9, omdat die rechtstreeks naar de stelling van Pythagoras zou kunnen leiden. In één klas werd deze aanpak bij één leerling gezien.

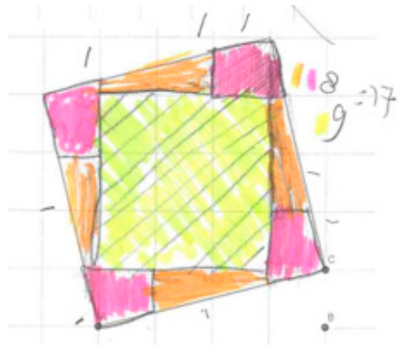
Fase 4, het bespreken van oplossingen, werd in de eerste twee lessen gedaan met behulp van een PowerPoint; Figuren 8 en 9 zijn afbeeldingen uit de Powerpoint. De bespreking had een heldere structuur en overzichtelijke weergave van mogelijke oplossingen. Ook oplossingen die de klas niet had gevonden werden besproken. Leerlingen leken te begrijpen wat berekeningen voorstelden, maar het werd niet duidelijk of dat voor elke leerling zo was. In de derde les werd een aanpassing



Figuur 4. 'Recht zetten'



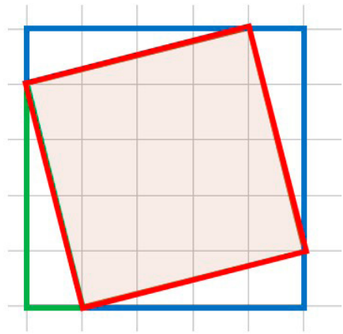
Figuur 5. Hokjes tellen



Figuur 6. Hokjes combineren

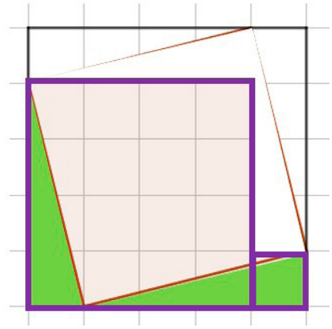


Figuur 7. Opdelen



Figuur 8. Oppervlakte via inlijsten

2 vierkanten:
Oppervlakte = 4 · 4 + 1 · 1 = 17 cm²



Figuur 9. Oppervlakte via twee vierkanten

gedaan. Oplossingen werden opgebouwd in interactie met leerlingen, door op het bord en op vergrote afbeeldingen van Figuur 2, de ideeën te tekenen of laten tekenen, waarbij alle leerlingen gevraagd werd of ze een aanpak begrepen. Oplossingen met telstrategieën werden door de leerlingen vlot herkend, maar het duurde lang, zo'n 10 minuten, voordat leerlingen de methode 'inlijsten' goed konden verwoorden. Probleem leek dat de berekening voor de oppervlakte van een driehoek niet paraat was bij veel leerlingen. Alleen in de klas bedachte oplossingen werden besproken. Uiteindelijk waren het dus niet drie identieke lessen, maar de lessen hadden wel dezelfde rode draad.

In alle lessen werd in elk geval fase 4 en 5 doorlopen. Meerdere leerlingen ontdekten de 'vermoedelijke' regel: oppervlakte vierkant = (aantal naar rechts)^2 + 1 . Het gesprek hierover in de klas verliep vaak snel. We merkten dat, als je als docent alle fasen van de les wilt afronden, dit zorgt voor versnelling in het bespreken, waardoor niet alle leerlingen meer 'mee lijken te komen'.

In de vervolgopdracht met *2-omhoog*-vierkanten werden de oppervlakten van de scheve vierkanten gevonden. De meeste leerlingen hadden nu een methode gevonden, waarmee het hun lukte de oppervlakte te bepalen. Bijna alle groepjes kwamen tot de juiste antwoorden en zagen dat de ontdekte regel niet klopte, maar moest worden aangepast. In alle klassen was er wel tenminste één leerling die, binnen de 45 minuten, de juiste regel ontdekte: rechts^2 + omhoog^2.

Terugblik

Pythagoras zelf ontdekken

We kozen ervoor om de stelling van Pythagoras aan te bieden via het onderzoeken van oppervlakten van scheve vierkanten. Een vooraf onderkende uitdaging was dat deze stelling formeel betrekking heeft op de *zijden* van een rechthoekige driehoek, terwijl de les zich richtte op de *oppervlakte* van het scheve vierkant. Voor leerlingen kan het uitdagend zijn om de stap te maken van de oppervlakte van het vierkant naar de lengte van de zijde. Dit thema werd door docenten in een vervolgles behandeld.

Een andere uitdaging bleek dat bekend veronderstelde voorkennis, zoals de berekening van de oppervlakte van een driehoek, niet sterk verankerd bleek. Docenten waren hierdoor verrast, omdat dit onderwerp nadrukkelijk in de voorgaande periode behandeld was. Dit zou ervoor pleiten om hierover nog een voorkennisopdracht op te nemen; een andere optie is om lessen over deze onderwerpen ook met behulp van TTP-lessen te onderwijzen, omdat leerlingen dan mogelijk diepgaander kennis rond deze thema's zouden kunnen opbouwen.

De aanpak om in fases de stelling van Pythagoras te ontdekken past niet goed in één les van 45 minuten. De werkwijze om verschillende oplossingen in samenspraak met de leerlingen op te bouwen kost tijd. In onze lessen in havo 2 merkten we dat die tijd ook nodig was om oplossingen die in de klas bedacht zijn te begrijpen. De lesgevende docenten merkten dat je op momenten waarop het langer duurt om iets te bespreken, je geneigd bent om de uitleg meer zelf te gaan geven, in plaats van in samenspraak met de leerlingen. Het is daarom aan te bevelen om voor deze opzet twee lessen te reserveren.

Een kracht van de les was dat leerlingen ervaren hoe een wiskundige te werk gaat: problemen aanpakken, vermoedens formuleren en zoeken naar patronen. Het zoeken naar dergelijke patronen heeft een lange historie heeft. Een mooi voorbeeld hiervan is een afbeelding uit een circa 2000 jaar oud Chinees werk (Figuur 10) waarin de tekst aan de linkerkant luidt: "De som van de kwadraten van de korte en lange rechthoekszijde vormt samen het kwadraat van de schuine zijde". Deze historische achtergrond en de wiskundige aanpak zou in de les geëxpliciteerd kunnen worden.



Figuur 10 . Diagram uit een oud Chinees boek de Zhoubi Suanjing (zie Eberhard-Bréard, 2008)

Probleemoplossen en houding

Deze les heeft naast de inhoud ook doelen op het gebied van probleemoplossingsvaardigheden. Daaronder vallen aspecten zoals het gebruik van heuristieken zoals het tekenen van hulplijnen, een houding van durven proberen en doorzetten, en metacognitieve vaardigheden, zoals plannen, monitoren en controleren (Roorda et al., 2024). Een ervaring in de lessen was dat veel leerlingen actief betrokken waren bij het berekenen van de gevraagde oppervlaktes. De productieve houding werd bevorderd doordat de opdracht een passend instapniveau had: alle leerlingen konden beginnen met hokjes van het vierkant tellen. De ervaring was wel dat sommige leerlingen erg vasthielden aan telstrategieën, maar meerdere leerlingen stapten na de bespreking van de eerste opdracht over naar rekenstrategieën. Ook metacognitieve vaardigheden werden gestimuleerd door vragen zoals: Kun je je antwoord controleren, of kun je via een andere aanpak jouw antwoord checken?'. Vaak hielp dit leerlingen om verder te puzzelen.

Na de lessen is in één klas gevraagd hoe de leerlingen de les hebben ervaren. Bijna iedereen vond de les heel leuk. Enkele leerlingen gaven aan dat ze door de les de regel misschien wel makkelijker onthouden. Enkele andere leerlingen geven aan liever een 'gewone' les te krijgen. Het is volgens deze leerlingen duidelijker om de regel te krijgen en dan opgaven te maken, dan anderhalve les toe te werken naar de regel. Verklaringen hiervoor kunnen zijn dat leerlingen gewend zijn aan de directe instructie-aanpak die veel structuur biedt; het oefenen van procedures die de docent uitlegt geeft mogelijk meer houvast.

We hebben niet kunnen vaststellen of deze 'losse' les probleemoplossingsvaardigheden versterkt. Daar is meer tijd voor nodig. Volgens Lester en Cai (2016) is het voor ontwikkelen van probleemoplossingsvaardigheden nodig dat wiskundeonderwijs 'doordrenkt' is met probleemoplossen; het moet integraal onderdeel zijn van het leren van wiskunde. Als scholen aandacht willen hebben voor de nieuwe kerndoelen waarin onder andere problemen oplossen centraal staat, zal er gezocht moeten worden naar integratie van dergelijke lessen in het curriculum.

Het leren van deelnemers

Alle docenten waarderen de samenwerking rond het ontwikkelen en geven van deze les. Volgens de docenten geven observaties goed inzicht in het leren van leerlingen, bijvoorbeeld dat voorkennis minder sterk was dan verwacht en dat het berekenen van oppervlaktes lastig bleek.

De docenten waardeerden ook de aanpak en opzet van de les, met veel activiteiten voor leerlingen om problemen op te lossen en patronen te ontdekken, maar ze verschilden in hun interpretaties van de waarde van zulke lessen. Enkele docenten verwoordden achteraf dat het introduceren van de stelling van Pythagoras op deze manier veel tijd kost, terwijl de studieplanner weinig ruimte biedt voor 'uitstapjes'. Deze docenten vragen zich af of het niet efficiënter is om de stelling uit te leggen. Wel wordt ervaren dat zo'n TTP-les ook aandacht heeft voor andere aspecten van het leren van wiskunde, zoals probleemoplossen en een productieve houding. Een deelnemende docent vindt dat juist de belangrijkste les van het project. Deze docent formuleert: *"Ik wil vaak zulke lessen geven. Ik wil dit toepassen, het past beter bij mij. Er is wel tijd voor nodig, maar het stimuleert creativiteit bij leerlingen. Als ik alleen de planner volg worden doelen als probleem oplossen en patronen zoeken minder bereikt".* Deze verschillende interpretaties zijn mogelijk verbonden met de eerder beschreven opvattingen (Swan, 2011). Het zou goed zijn om het project niet alleen de les te ontwikkelen, maar ook expliciet te spreken over opvattingen van de deelnemende docenten.

Zelf leer ik in dit project dat het geven van goede TTP-lessen een complexe vaardigheid is, omdat je als docent minder 'je verhaal' vertelt, maar je verhaal wilt opbouwen in interactie met de leerlingen met hun ideeën. Het spanningsveld dat ik daarin steeds ervaar is hoe je kunt aansluiten op het denken van de leerlingen, zonder de uitleg over te nemen.

Afsluiting

In dit traject hebben alle deelnemers veel ideeën en indrukken opgedaan en geleerd met en van elkaar. Hoe elke docent dit in de toekomst integreert in lessen zal misschien verschillen, maar iedereen was enthousiast over het geven van een TTP-les en ziet daarvan de meerwaarde in. Lesson Study is hierbij een mooie manier om als team te leren over het lesgeven.

Met dank aan de deelnemende wiskundedocenten van Winkler Prins, Veendam.

[1] De NRich website bevat veel ideeën voor verrijkende wiskundelessen, ontwikkeld bij de Universiteit van Cambridge: Zie https://nrich.maths.org/problems/tilted-squares. Dit geldt ook voor materialen van het Mathematics Assessment project, zie https://www.map.mathshell.org/lessons.php?unit=8315&collection=8

[2] Materialen van deze les zijn te vinden op de website ttpwiskunde.nl

Literatuur

Eberhard-Bréard, A. (2008). Mathematics in China. In: Selin, H. (eds) *Encyclopaedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Western Cultures*. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-4425-0_9453

Lester, F. K., & Cai, J. (2016). Can Mathematical Problem Solving Be Taught? Preliminary Answers from 30 Years of Research. In P.L. Felmer, E.Pekhonen & J. Kilpatrick, *Posing and solving mathematical problems.* Springer.

Roorda, G., de Vries, S., & Smale-Jacobse, A. E. (2024). Using lesson study to help mathematics teachers enhance students' problem-solving skills with teaching through problem solving. *Frontiers in Education*, 9, Article 1331674. https://doi.org/10.3389/feduc.2024.1331674

Swan, M. (2011). Designing tasks that challenge values, beliefs and practices: A model for the professional development of practicing teachers. In O. Zaslavsky & P. Sullivan (Eds.), *Constructing knowledge for teaching secondary mathematics*, Springer.

Takahashi, A. (2021). *Teaching Mathematics through problem-solving. A pedagogical approach from Japan*. Routledge.

Gerrit Roorda is vakdidacticus wiskunde en lerarenopleider aan zowel de Rijksuniversiteit Groningen als aan de Masteropleiding Leraar Wiskunde van NHL Stenden Hogeschool.
Contact: g.roorda@rug.nl