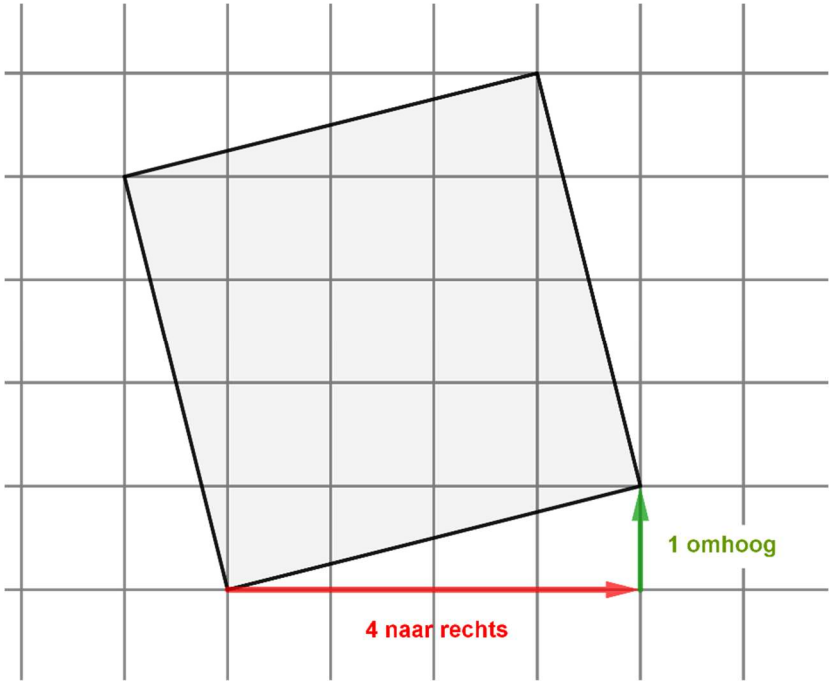
Titel: Pythagoras ontdekken

Doelgroep en aansluiting

Niveau/klas	VMBO-TL, havo, vwo 2
Onderwerp	Introductie van de Stelling van Pythagoras
Kerndoel(en)	12A De leerling analyseert en redeneert over patronen en verbanden. 14A De leerling lost wiskundige problemen en toepassingsproblemen op. 14C De leerling toont de juistheid van wiskundige beweringen en redeneringen aan. 16A De school stimuleert de ontwikkeling van een wiskundige attitude bij leerlingen.
Lesdoelen	Je kunt een regel ontdekken voor het vinden van de oppervlakte van een scheef vierkant.
Lesduur	Voor alle fases zijn, afhankelijk van het niveau 75 – 100 minuten nodig
Benodigdheden	Werkbladen 1,2,3 (Een mogelijkheid is om een model te maken van een scheef vierkant met de omliggende rechthoekige driehoeken)

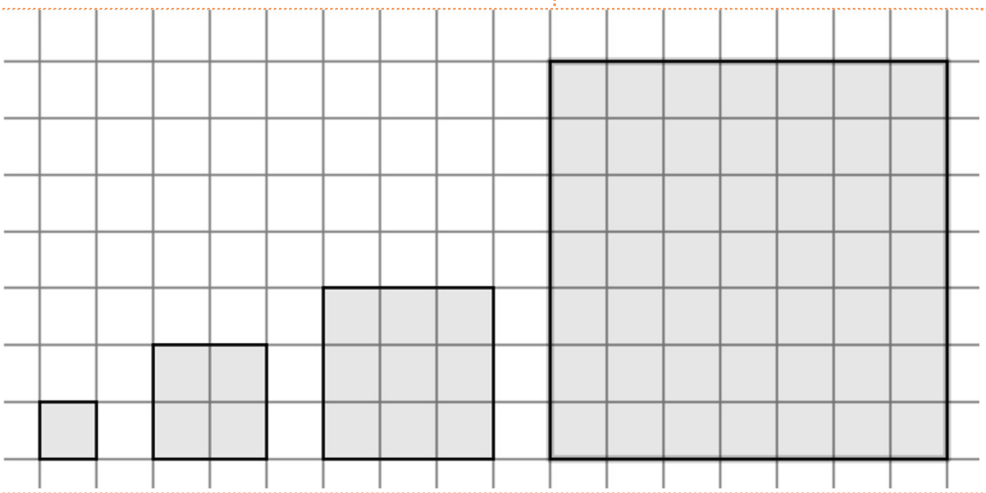
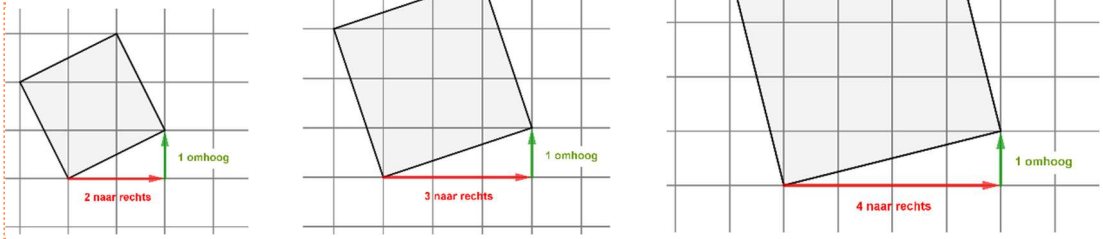
Het probleem

Kun je de oppervlakte van dit scheve vierkant vinden?



ttpwiskunde.nl

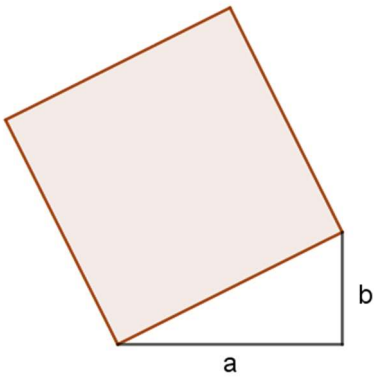
Aan de slag!

Fase & tijd	Instructiestappen	Aandachtspunten
Inleiding/ voorkennis 3 min.	Wat is de oppervlakte van de volgende vierkanten (hokjes zijn 1 bij 1 cm)	Check of leerlingen tellen of berekenen. Benoem het woord 'kwadraat'.
		
Inleiding/ Introductie probleem 3 min	Nu gaan we kijken naar scheve vierkanten. De vierkanten in de afbeeldingen krijgen een naam, namelijk: 2 naar rechts, 1 omhoog; 3 naar rechts, 1 omhoog; 4 naar rechts, 1 omhoog. Kunnen we de oppervlakte van deze scheve vierkanten vinden?	
		
Begrijp het probleem <tijdsduur>	Laten we kijken naar het laatste scheve vierkant (de 4 naar rechts 1 omhoog). Kun je de oppervlakte van dit scheve vierkant bepalen (zie werkblad 1)	
Probeer het probleem op te lossen <tijdsduur>	De leerlingen werken eerst individueel, en daarna in tweetallen. Mogelijke hints/vervolgvragen: Kun je je antwoord controleren (bijvoorbeeld ook als leerling antwoord 16 $cm^{2.}$) Kun je naast tellen ook een snellere berekening vinden? Kun je meerdere aanpakken bedenken?	

ttpwiskunde.nl

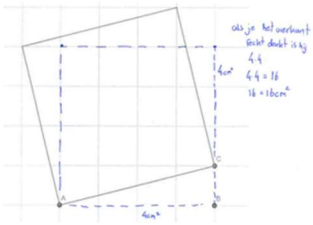
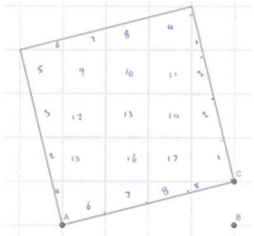
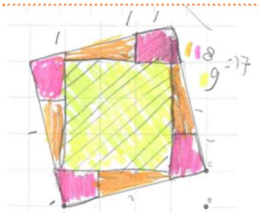
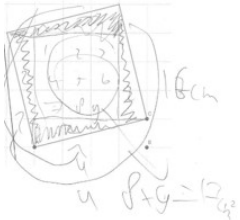
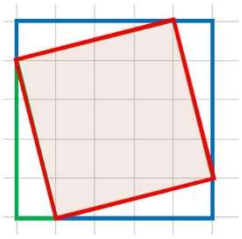
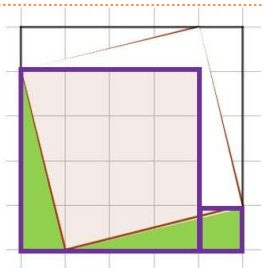
	[zie ook suggesties bij de verschillende oplossingen]	
Klassikaal bespreken <tijdsduur>	In dit (kenmerkende TTP-) deel van de les bespreek je verschillende aanpakken. Het kan belangrijk zijn om oplossingen op het bord op te bouwen. Daarvoor grote sheets met werkblad 1 gebruiken. Laat leerlingen ook elkaars ideeën uitleggen. Het kan handig zijn om oplossingen een 'naam' te geven, zoals - tellen - opdelen - inlijsten - driehoek schuiven Je kunt er dan makkelijk naar verwijzen.	Het liefst alleen oplossingen bespreken die in de klas gevonden zijn. Ook onjuiste oplossingen kunnen aandacht krijgen (omdat we daar met elkaar van kunnen leren) Opbouwen van telstrategieën naar rekenstrategieën.
Vervolg -1 8-10 min.	We hebben nu ontdekt dat een 4 naar rechts, 1 omhoog vierkant die scheef is een oppervlakte heeft van 17 Je gaat nu (bijvoorbeeld in tweetallen) uitrekenen hoe het zit bij de volgende vierkanten(zie werkblad 2) Tabel maken: *Scheef vierkant* *Oppervlakte* 2 naar rechts 1 omhoog 3 naar rechts 1 omhoog 4 naar rechts 1 omhoog 17 5 naar rechts, 1 omhoog 6 naar rechts, 1 omhoog Bespreken van de oppervlaktes. Zijn er leerlingen die een regel ontdekken: De regel **lijkt** dat je steeds (aantal naar rechts)^2 + 1 moet doen.	De gedachte in dit deel is dat je op basis van het patroon in de tabel *een vermoeden* formuleert. *In eerdere lessen bleek dat meerdere leerlingen het +1 patroon ontdekken en benoemen.*
Eventueel Uitbreiden -1 8-10 min	Nu kijken we naar scheve vierkanten die 2 omhoog gaan (zie werkblad 3) *Scheef vierkant* *Oppervlakte* 2 naar rechts 2 omhoog 3 naar rechts 2 omhoog 4 naar rechts 2 omhoog 5 naar rechts, 2 omhoog 6 naar rechts, 2 omhoog Klopt de regel die we ontdekt hebben?	We willen nu nagaan of het ontdekte *vermoeden* klopt voor andere scheve vierkanten. Dus nu eerste de oppervlakte vinden door op het werkblad de oppervlakte te vinden, en dan checken of het *vermoeden* klopt.

ttpwiskunde.nl

	Moet de regel aangepast.	Ook op dit punt in de les blijken enkele leerlingen een nieuw *vermoeden* te formuleren namelijk dat de oppervlakte van het scheve vierkant gelijk is aan (aantal naar rechts)^2 + (aantal omhoog)^2
Uitbreiden - 2 8-10 min.	Het nieuwe vermoeden klopt (dat kan in een latere les mogelijk nog bewezen worden) De regel die we ontdekt hebben is .  Bij een scheef vierkant van a naar rechts, b omhoog is de oppervlakte $a^2 + b^2$ Als we de oppervlakte van van het scheve vierkant weten, dan weten we ook de zijde, namelijk $\sqrt{a^2 + b^2}$	We hebben nu in feite een nieuw vermoeden. Om er zeker van te zijn moeten we 'bewijzen' dat het vermoeden klopt. *Dit doen we in een latere les.*
Samenvatten & afsluiten <tijdsduur>		

ttpwiskunde.nl

Oplossingen van leerlingen

	Oplossingsrichtingen van de leerling	Ondersteuning van de docent
A	Leerlingen denken dat de oppervlakte 16 cm^2 is. 	Kun je je antwoord checken. Kun je meten hoe lang de zijden zijn van het scheve vierkant en jouw rechte vierkant.
B	Leerlingen denken dat een zijde van 4 naar rechts en 1 omhoog een lengte van 4*1 = 4 heeft en komen op 16 cm^2	Kun je je antwoord checken. Kun je meten hoe lang de zijden zijn van het scheve vierkant.
C	Leerlingen tellen en combineren hokjes door nummertjes of aankruisen. 	Kun je naast tellen ook een berekening vinden?
D	Leerlingen delen het gebied op en tellen de hokjes van de verschillende gebieden 	Kun je naast tellen ook een berekening vinden?
E	Leerlingen delen op in vierkant en driehoek en tellen/of berekenen de oppervlaktes 	Kun je dit ook in een berekening opschrijven? Kun je nog een andere manier bedenken?
F	"Inlijsten" met vervolgens 'tellen' of rekenen: Hele vierkant 5x5 = 25; Één driehoek (1x4):2 = 2; Rode vierkant 25 – 4x2 = 17 	Kun je nog een andere manier bedenken?
G	Andere opdelingen: 4 x 4 + 1 x 1 = 17 Deze is mooi, omdat hij voorbereidt op de stelling van Pythagoras. 	Kun je nog een andere manier bedenken?
H	Leerlingen gebruiken de stelling van Pythagoras	Kun je de oppervlakte ook vinden zonder de stelling te gebruiken?

ttpwiskunde.nl

Ondersteuning voor de docent

Waarom dit probleem?

Deze uitgebreide opzet om de stelling van Pythagoras te introduceren heeft bredere doelstellingen dan enkel het kunnen toepassen van de stelling zelf. Via een proces van patroon zoeken, (met veel herhaling van voorkennis zoals het vinden en berekenen van oppervlaktes), vermoeden formuleren, vermoeden controleren en herformuleren, komt uiteindelijk de stelling naar voren. In deze les nog steeds als vermoeden; wij kozen ervoor om het bewijs pas later te bespreken.

Deze les gaat dus vooral om het vinden van een patroon voor de oppervlakte van scheve vierkanten. De opzet kan gebruikt worden om de stelling van Pythagoras te introduceren. De opzet kan (na aanpassing) ook gebruikt worden voor introductie van wortels

Als je de oppervlakte van de scheve vierkanten gevonden hebt, kan vervolgens aan de orde komen dat je daarmee ook de lengte van de lange zijde kunt berekenen; dat kan ook in een volgende les.

Probleemoplossingsvaardigheden

Heuristieken: Bij het vinden van de oppervlakte van het 4-naar-rechts-1-omhoog vierkant kunnen strategieën benoemd worden zoals: hulplijnen tekenen zodat je opdeelt in delen waarvan je de oppervlakte kent.

Metacognitie: bijvoorbeeld het belang van controleren, als je een antwoord denkt te hebben.

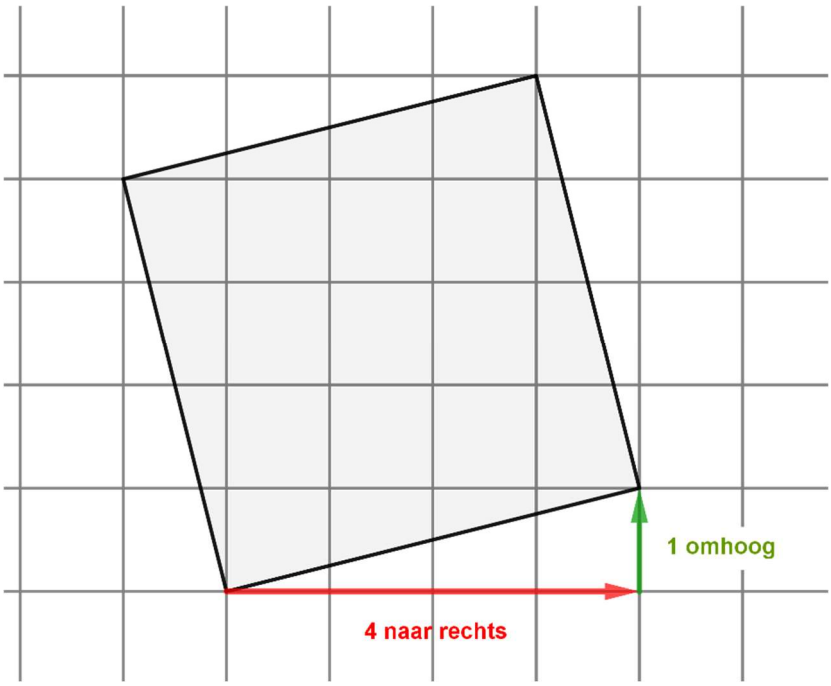
Houding: Doorzetten, durven proberen, maar ook flexibiliteit: als je een oplossing hebt, zoeken naar andere aanpakken.

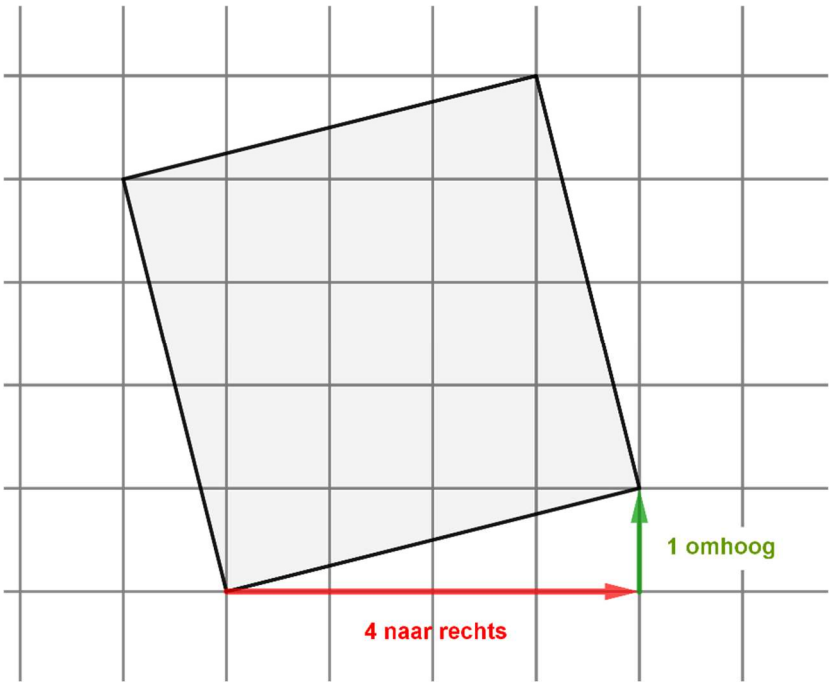
Differentiatie

Op werkblad 2 is het uitdagend om oppervlaktes te vinden van niet getekende scheve vierkanten (zoals de 6- naar-rechts-1-omhoog.)

Werkblad 1 - Pythagoras ontdekken

Kun je de oppervlakte van dit scheve 4-naar- rechts – 1- omhoog vierkant vinden?
De figuur is twee keer afgebeeld zodat je meerdere manieren kan proberen.

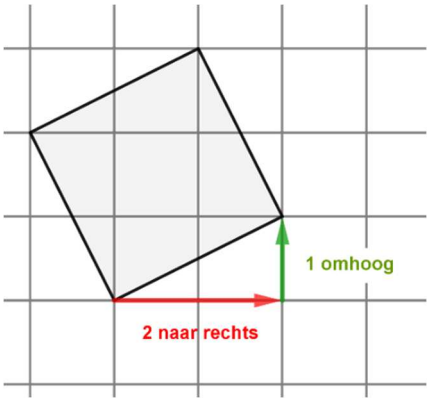


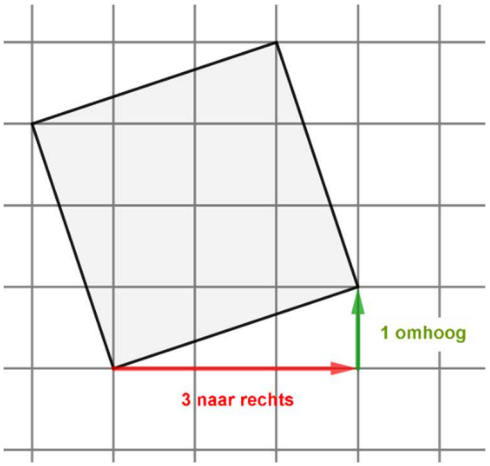


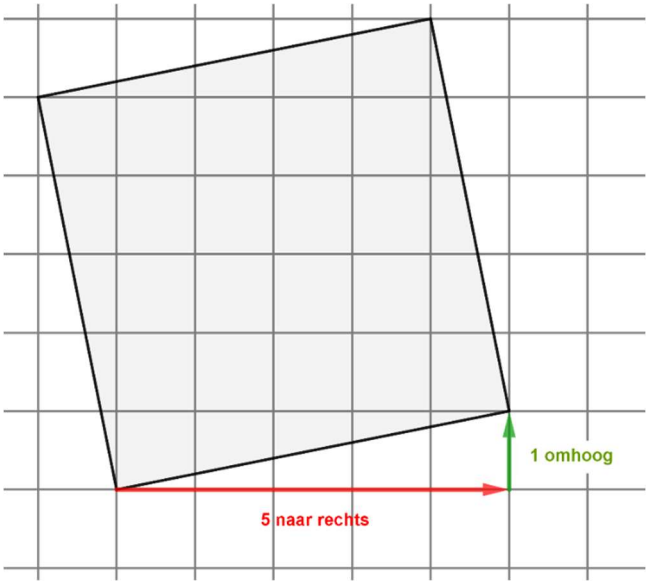
ttpwiskunde.nl

Werkblad 2 - Pythagoras ontdekken

Kun je de oppervlaktes vinden van de volgende scheve vierkanten?



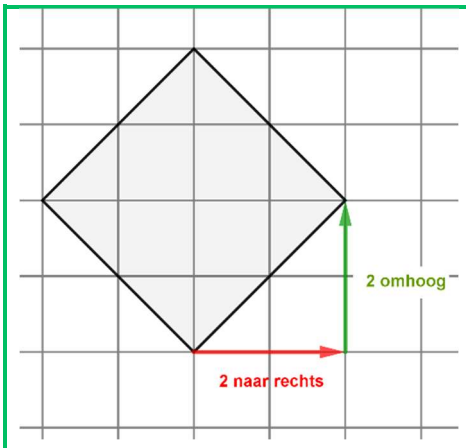


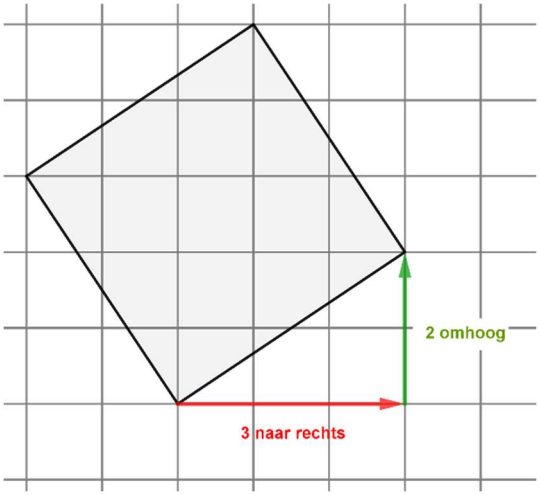


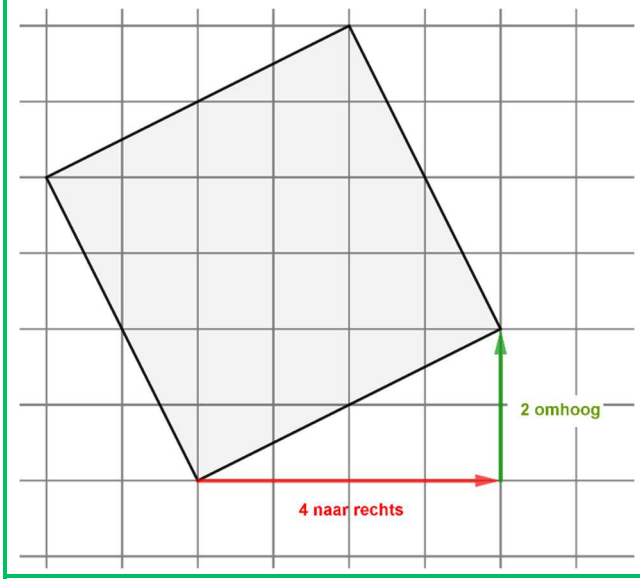
Hoe zit het bij 6 naar rechts - 1 omhoog?

ttpwiskunde.nl

Werkblad 3 - Pythagoras ontdekken







Hoe zit het bij 5 naar rechts – 2 omhoog?
Hoe zit het bij 6 naar rechts – 2 omhoog?

Observaties uit de les

Zie ‘uitwerkingen van leerlingen’.

ttpwiskunde.nl